ФИЗИКА В НГУ

Г. В. Меледин, В. С. Черкасский

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ЗАДАЧАХ

Часть I

Электродинамика частиц и полей

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра общей физики

Г. В. Меледин, В. С. Черкасский

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ЗАДАЧАХ

Часть I

Электродинамика частиц и полей
Учебное пособие

Новосибирск
2003

ББК В 313я 73-4
УДК 537+338
М 473
Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Электродинамика частиц и полей: Учеб. пособие: В 2 ч./ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2003. Ч. I. 227 с.

В учебном пособии содержатся задачи, предлагавшиеся студентам физического факультета НГУ на семинарах, в заданиях для самостоятельной работы, а также на письменных курсовых контрольных и в экзаменационных работах. Кроме того, включено некоторое количество задач, имеющихся в учебной литературе, прежде всего в известном пособии В. В. Батыгина, И. Н. Топтыгина «Сборник задач по электродинамике».

Решение задач базируется на системе уравнений Максвелла и соответствующих граничных условиях. В качестве основной системы единиц используется Гауссова система, широко используемая в фундаментальной физике. Переход к системе СИ обычно не вызывает затруднений.

Учебное пособие предназначено, прежде всего, для студентов-физиков и информатиков НГУ и преподавателей, ведущих соответствующие семинарские занятия. Задачник соответствует годовому курсу электродинамики (I-я часть охватывает материал осеннего семестра второго курса).

Рекомендовано редакционно-издательским отделом НГУ для специальности 2016.

©Новосибирский государственный университет, 2003

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ **7**

ВВЕДЕНИЕ **10**
Произвольные ортогональные координаты 10
Цилиндрические координаты 11
Сферические координаты 12
Полезные формулы 13
Система уравнений Максвелла 14

1 ЭЛЕКТРОСТАТИКА В ВАКУУМЕ **16**
1.1 Закон Кулона. Поле и потенциал точечного заряда. Принцип суперпозиции 18
1.2 Теорема Гаусса 20
1.3 Диполь. Мультиполи 21
1.4 Уравнения Пуассона и Лапласа 24
1.5 Решение типичных задач 25

2 ЭЛЕКТРОСТАТИКА В СРЕДЕ **59**
2.1 Граничные условия 61
2.2 Емкость 62
2.3 Метод изображений 64
2.4 Энергия поля. Давление. Силы 68
2.5 Решение типичных задач 71

3 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК **99**
3.1 Сохранение заряда. Граничные условия. Закон Ома . 100
3.2 Закон «трех вторых» 106
3.3 Решение типичных задач 107

4 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ **117**
4.1 Закон Био—Савара. Теорема Стокса. Суперпозиция полей 119
4.2 Векторный потенциал, магнитный диполь. Прецессия магнитного момента 121
4.3 Решение типичных задач 124

5 МАГНИТОСТАТИКА В СРЕДЕ 134
5.1 Граничные условия для магнитного поля. Метод изображений. Постоянные магниты. Магнитные цепи . . 135
5.2 Взаимодействие токов с магнитным полем. Энергия и давление поля 139
5.3 Решение типичных задач 140

6 КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ 146
6.1 Индуктивность. Взаимная индукция 147
6.2 Сохранение магнитного потока 151
6.3 Электромагнитная индукция 154
6.4 Цепи переменного тока. Трансформаторы. Длинные линии 158
6.5 Скин-эффект 162
6.6 Поток энергии. Ток смещения 167
6.7 Решение типичных задач 168

7 ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ 195
7.1 Движение частиц в электрическом и магнитном полях. Дрейф. Магнитная ловушка 196
7.2 Фокусировка полями. Квадрупольные электростатические и магнитные линзы 197

Физические постоянные 200

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ 201
1.1 Закон Кулона. Поле и потенциал точечного заряда. Принцип суперпозиции 201
1.2 Теорема Гаусса 202
1.3 Диполь. Мультиполи 202
1.4 Уравнения Пуассона и Лапласа 204
2.1 Граничные условия 204
2.2 Емкость 205
2.3 Метод изображений 206
2.4 Энергия поля. Давление. Силы 208
3.1 Сохранение заряда. Граничные условия. Закон Ома . 209
3.2 Закон «трех вторых» 212

4.1 Закон Био — Савара. Теорема Стокса. Суперпозиция полей 212
4.2 Векторный потенциал, магнитный диполь. Прецессия магнитного момента 214
5.1 Граничные условия. Метод изображений. Постоянные магниты. Магнитные цепи 215
5.2 Взаимодействие токов с магнитным полем. Энергия и давление поля 217
6.1 Индуктивность. Взаимная индукция 218
6.2 Сохранение магнитного потока 219
6.3 Электромагнитная индукция 220
6.4 Цепи переменного тока. Трансформаторы. Длинные линии 221
6.5 Скин-эффект 222
6.6 Поток энергии. Ток смещения 224
7.1 Движение частиц в электрическом и магнитном полях. Дрейф. Магнитная ловушка 225
7.2 Фокусировка продольным и поперечным полями. Квадрупольные электростатические и магнитные линзы . 225

Библиографический список **226**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник задуман как пособие для обучения электродинамике студентов-физиков и информатиков НГУ. За многие годы коллективом физиков, преподающих электродинамику на физическом факультете НГУ, был отобран в рамках программы круг тем, установлена последовательность изучения, определен необходимый минимум обязательных задач. Была отработана также система занятий и контроля за усвоением материала. В нее вошли как традиционные формы — семинарские занятия, контрольная работа, общая для всего курса, так и задания с приемкой каждой задачи у каждого студента; экзамен, разбитый на два этапа: письменный и устный. Оценка, выставляемая на устном экзамене в сессию, учитывает кроме устного ответа еще и результат письменной экзаменационной работы, выполняемой за день—два до устного экзамена, и оценку за работу в семестре. Последняя оценивает сдачу заданий, активность на семинарах, результат курсовой письменной контрольной. Такой подход к проверке знаний позволяет в значительной мере избежать элемента случайности на экзамене, требует от студента регулярных знаний по всему курсу в течение семестра. Заметим, что на всех этапах проверки, кроме устного экзамена, студенту разрешается использовать любые учебные пособия. Это, естественно, предъявляет определенные требования к предлагаемым задачам: они должны быть не шаблонными, в достаточной степени оригинальными (преподаватели в большинстве — научные сотрудники институтов СО РАН, так что большинство оригинальных задач возникло в результате конкретной научной деятельности). Вместе с тем в задачник включено немалое количество типовых «обязательных» задач, широко распространенных в учебной литературе (библиографический список, как использованная, так и полезная для обучения литература приводится в конце).

При проверке задач на всех этапах обращается внимание на следу-

ющие факторы: 1) понимание физической сущности задачи, области применимости решения; 2) рациональное использование математического аппарата, отыскание наилучшего из путей к решению; 3) получение как точного результата, так и в необходимом случае оценки; 4) умение довести решение до конца, до числа, грамотно и разумно использовать нужную систему единиц.

По поводу характера отбора задач, связанного с программой, необходимо отметить следующее. При изучении электродинамики в НГУ не предусматривается разделение курса на общую и теоретическую физику. Единый подход полезен, но, однако, обучение электродинамике на младших курсах требует при этом значительного облегчения математического аппарата, порой введения и использования некоторых математических приемов и разделов до их изучения в курсе математики. На этом пути, к сожалению, неизбежны и некоторые потери.

Еще одной особенностью данного курса является почти полный отказ от детальных вопросов электродинамики в средах. Это связано с тем, что соответствующие темы рассматриваются позже в соответствующих курсах и спецкурсах с учетом освоения проблем квантовой механики и статистической физики.

Данное пособие представляет собой переработанное и дополненное пособие Г. В. Меледина, Ю. И. Эйдельмана , Г. В. Рослякова «Задачи по электродинамике частиц и полей», в которое включены задачи из пособия Т. А. Ждановой , Г. В. Меледина «Задачи по электродинамики с решениями», вызвавшего большой интерес у студентов и преподавателей. Исправлено заметное число описок, ошибок, опечаток.

Авторы выражают глубокую благодарность за критическое внимание лекторам курса «Электродинамика» профессорам И. А. Котельникову, Б. А. Князеву, Б. А. Луговцову, В. И. Яковлеву, а также выражают свою признательность А. Г. Погосову, обнаружившему и исправившему большое число ошибок и опечаток в ответах; благода-

рят О. Г. Батеневу за помощь в оформлении рукописи и студентов Русанова, Пожидаеву и Огнева за создание рисунков. Большое спасибо всем, оказавшим помощь и содействие в создании этой книги.

Ниже дана таблица, в которой представлен перевод электрических и магнитных величин из системы Си в Гауссову систему

Наименование	СИ	Гауссова система
Длина ℓ	1 м (метр)	10^2см
Масса m	1 кг (килограмм)	10^3г
Время t	1 с (секунда)	1 с
Сила F	1 Н (Ньютон)	10^5дин
Энергия $\mathcal{E}, W$	1 Дж (Джоуль)	10^7эрг
Давление p	1 Па (Паскаль)	10 дин/см^2
Сила тока J	1 А (Ампер)	$3 \cdot 10^9$см$^{3/2}$г$^{1/2}$/с^2
Электрический заряд e, q	1 Кл (Кулон)	$3 \cdot 10^9$ см$^{3/2}$г$^{1/2}$/с
Напряженность электрического поля Е	1 В/м (Вольт на метр)	$\frac{1}{3}10^{-4}$г$^{1/2}$/(см$^{1/2}$с)
Потенциал φ	1 В (Вольт)	$\frac{1}{3}10^{-2}$см$^{1/2}$г$^{1/2}$/с
Емкость C	1 Ф (Фарада)	$9 \cdot 10^{11}$см
Сопротивление R	1 Ом (Ом)	$\frac{1}{9}10^{-11}$с/см
Напряженность магнитного поля H	1 А/м (Ампер на метр)	$4 \cdot 10^{-3}$Э (Эрстед)
Магнитная индукция B	1 Т (Тесла)	10^4Гс (Гаусс)
Магнитный поток Φ	1 Вб (Вебер)	10^8Мкс (Максвелл)
Индуктивность L	1 Г (Генри)	10^9см

ВВЕДЕНИЕ

Произвольные ортогональные координаты

В любых ортогональных координатах (q_1, q_2, q_3) квадрат элемента дуги равен $dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$, где h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламе. Элемент объема $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$. *Линии* произвольного *векторного поля* $\vec{A}(q_1, q_2, q_3)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{h_1 dq_1}{A_{q1}} = \frac{h_2 dq_2}{A_{q2}} = \frac{h_3 dq_3}{A_{q3}}.$$

Градиент скалярной функции

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы, касательные к координатным линиям в данной точке (q_1, q_2, q_3).

Дивергенция вектора $\vec{A}$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_{q1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 A_{q2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_{q3})\right].$$

Ротор вектора $\vec{A}$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right] =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_{q1} & h_2 A_{q2} & h_3 A_{q3} \end{vmatrix}.$$

Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right].$$

Цилиндрические координаты

В *цилиндрических координатах* $(q_1 = R, q_2 = \alpha, q_3 = z)$ $h_1 = 1$, $h_2 = R, h_3 = 1$, $dl^2 = dR^2 + R^2 d\alpha^2 + dz^2$, $dV = R dR d\alpha dz$.

Дифференциальные уравнения линий векторного поля $\vec{A}$

$$\frac{dR}{A_R} = \frac{R d\alpha}{A_\alpha} = \frac{dz}{A_z}.$$

Градиент скалярной функции $\varphi(R, \alpha, z)$

$$\operatorname{grad}_R \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial R};\ \operatorname{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha};\ \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Дивергенция вектора $\vec{A}(R, \alpha, z)$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R A_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Компоненты *ротора* вектора $\vec{A}(R, \alpha, z)$ имеют вид

$$\operatorname{rot}_R \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; \operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R};$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R A_\alpha) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial \alpha}$$

Оператор Лапласа

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты

В *сферических координатах* $(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \alpha)$ $h_1 = 1$, $h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$, $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\alpha^2$,
$dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\alpha = r^2 dr d\Omega$, где $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\alpha$ — телесный угол.

Дифференциальные уравнения линий векторного поля $\vec{A}(r, \theta, \alpha)$

$$\frac{dr}{A_r} = \frac{r d\theta}{A_\theta} = \frac{r\sin\theta d\alpha}{A_\alpha}.$$

Дивергенция вектора $\vec{A}(r, \theta, \alpha)$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}.$$

Градиент скалярной функции $\varphi(r, \theta, \alpha)$

$$\operatorname{grad}_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r},\ \operatorname{grad}_\theta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\ \operatorname{grad}_\alpha\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}.$$

Компоненты *ротора* вектора $\vec{A}(r, \theta, \alpha)$ имеют вид

$$\operatorname{rot}_r\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\alpha) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\alpha}\right];$$

$$\operatorname{rot}_\theta\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha)\right];$$

$$\operatorname{rot}_\alpha\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}.$$

Оператор Лапласа

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

Полезные формулы

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}(\psi) + \psi \operatorname{grad}(\varphi);$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{div}\vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad}\varphi;$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}\varphi \times \vec{A};$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0;$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0;$$

$$\operatorname{div}\left[\vec{A} \times \vec{B}\right] = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B};$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A};$$

$$\operatorname{div}\vec{r} = 3;$$

$$\operatorname{rot}\vec{r} = 0;$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r};$$

$$\operatorname{grad}(1/r) = -\vec{r}/r^3.$$

Теорема Остроградского—Гаусса

$$\int_V \operatorname{div}\vec{A}dV = \oint_S A_n dS,$$

где n — внешняя нормаль к S, охватывающей объем V.

Теорема Стокса

$$\oint_L A_l dl = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{A} dS,$$

где S — поверхность, натянутая на замкнутый контур S, а n — нормаль к этой поверхности, составляющая правовинтовую систему с направлением обхода контура.

Система уравнений Максвелла

В основе макроскопической электродинамики лежат уравнения Максвелла, опирающиеся на несколько физических законов. Закон Фарадея

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$

закон Био—Савара и наличие тока смещения

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};$$

закон Кулона, приводящий к теореме Гаусса

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\varrho;$$

и отсутствие точечных магнитных зарядов

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — векторы индукции полей, определяемые уравнениями

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E},\ \ \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \mu\vec{H}.$$

Здесь $\vec{P}$ — поляризованность, дипольный электрический момент единицы объема, $\vec{M}$ — намагниченность, дипольный магнитный момент единицы объема, ϱ — объемная плотность свободных зарядов, $\vec{j} = \varrho\vec{v}$ — плотность электрического тока, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Система уравнений Максвелла записана в абсолютной Гауссовой системе единиц. Из линейности уравнений Максвелла следует *принцип суперпозиции* полей.

Из системы уравнений следуют два закона сохранения: *закон сохранения заряда*

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j},$$

и *закон сохранения энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\vec{E}\vec{D})}{8\pi}+\frac{(\vec{H}\vec{B})}{8\pi}\right]+(\vec{j}\vec{E})+\operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]\right\}=0,$$

или

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\int(\vec{j}\vec{E})dV+\oint(\vec{S}d\vec{s}),$$

где W — энергия поля,

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\left\{\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}\right\}dV,$$

$\vec{S}$ — вектор Пойнтинга,

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right];$$

импульс поля $\vec{p}=\frac{1}{c^2}\int\vec{S}dV$.

Интегральная форма системы уравнений Максвелла имеет вид

$$\oint E_l dl=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint B_n ds,$$

$$\oint H_l dl=\frac{4\pi}{c}\iint j_n ds+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint D_n ds,$$

$$\oiint 4\pi\int\varrho dV,$$

$$\oiint B_n ds=0,$$

откуда следуют *граничные условия*

$$E_{1\tau}|=E_{2\tau}|,\;\; D_{1n}|-D_{2n}|=4\pi\sigma_{\text{своб}},$$

$$B_{1n}|=B_{2n}|,\;\; H_{1\tau}|-H_{2\tau}|=\frac{4\pi}{c}I_{\text{пов}}.$$

Полезным оказывается введение скалярного φ и векторного $\vec{A}$ потенциалов:

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\;\; \vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}.$$

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА В ВАКУУМЕ

Уравнения Максвела в вакууме в дифференциальной форме имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho\,, \;\; \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \tag{1}$$

а в интегральной форме

$$\iint\limits_S E_n dS = 4\pi q\,, \;\; \oint \vec{E}d\vec{l} = 0\,, \tag{2}$$

откуда получаются граничные условия

$$E_{1n}| - E_{2n}| = 4\pi\sigma \text{ , и } E_{1\tau}| = E_{2\tau}|\,, \; (\vec{n} = \vec{n}_{21}). \tag{3}$$

Поле точечного заряда (Закон Кулона)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{4}$$

Принцип суперпозиции для полей $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$. При непрерывном распределении зарядов

$$\vec{E} = \int \rho\frac{\vec{r}}{r^3}dV + \int \sigma\frac{\vec{r}}{r^3}dS + \int \varkappa\frac{\vec{r}}{r^3}dl\,. \tag{5}$$

Электрическое поле потенциально

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\vec{\nabla}\varphi, \;\; \text{работа } A = q(\varphi_1 - \varphi_2)\,. \tag{6}$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi_{\text{точ}} = -\int E_l dl = \frac{q}{r} + C\,. \tag{7}$$

Часто константу C выбирают равной 0.

Энергия точечного заряда q в поле с потенциалом φ $W = q\varphi$. Для совокупности зарядов энергия системы

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} q_i\varphi_k = \frac{1}{2}\left(\int \rho\varphi\, dV + \int \sigma\varphi\, dS + \int \varkappa\varphi\, dl\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV\,. \qquad (8)$$

Уравнение для потенциала с источниками (зарядами) — уравнение Пуассона и уравнение без источников — уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\,,\ \Delta\varphi = 0\,. \qquad (9)$$

Граничные условия на границе раздела сред $1-2$ (n — нормаль из среды 1 в 2.

$$\varphi_1 = \varphi_2\,,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma\,. \qquad (10)$$

Решение уравнения Пуассона для точечного заряда

$$\Delta\varphi_{\text{точ}} = -4\pi\delta(\vec{r})\,,\ \varphi_{\text{точ}} = \frac{q}{r} + C\,. \qquad (11)$$

Общее решение уравнения Пуассона для распределенной системы зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r'})\, dV'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \int\limits_S \frac{\sigma(\vec{r'})\, dS'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \int\limits_L \frac{\varkappa(\vec{r'})\, dl'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \qquad (12)$$

При $r >> a$, где a — характерный размер системы зарядов, потенциал произвольной системы зарядов

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\Sigma Q_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{r^5} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{r^3}\right) + \dots\,, \qquad (13)$$

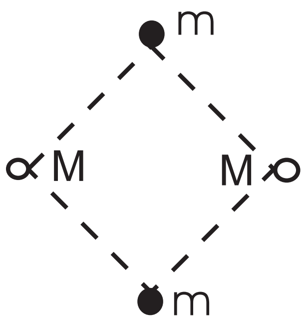
где $q = \Sigma q_k$, $\vec{p} = \Sigma q_k\vec{r}_k$, $Q_{\mu\nu} = \Sigma\left(q_k x'^k_\mu x'^k_\nu - \frac{1}{3}r'^2_k\delta_{\mu\nu}\right)$, x'^k — координаты заряда q_k, а $r'^2_k = \Sigma(x'^k)^2$.
Сила $\vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}W$.

Энергия диполя $W = -(\vec{p}\vec{E})$, момент силы $\vec{N} = [\vec{p} \times \vec{E}]$.
В неоднородном поле $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$.

1.1. Закон Кулона. Поле и потенциал точечного заряда. Принцип суперпозиции

1.1. Протон покоится. С большого расстояния прямо на него налетает другой протон, имевший вначале энергию $\mathcal{E}$. Найти минимальное расстояние между частицами. При какой «температуре» T это расстояние $r_{min} = 10^{-13}$ см? Масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-24}$г, $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$эрг/К.

1.2. В противоположных вершинах квадрата со стороной a оказались два протона (заряды $+e$, массы M) и два позитрона (заряды $+e$, массы $m_e \ll M$) — все с нулевыми скоростями. Оценить скорости частиц после полного «развала» системы.



1.3. Три одинаковых частицы имеют массу m и заряд $-q$ каждая. Расстояние между каждой парой a. Они движутся на неизменном расстоянии вокруг центральной частицы, заряд которой равен $+q$. При какой скорости частиц система находится в равновесии? Какова энергия полной «ионизации» системы?

1.4. Заряды $-q_1$ и q_2 закреплены в точках A и B, $AB = a$. Частица массы m с зарядом q летит вдоль прямой AB. Какую скорость v должна иметь эта частица на большом расстоянии от зарядов, чтобы достичь точки A?

1.5. Кольцо из тонкой проволоки разрывается, если его зарядить зарядом Q. Диаметр кольца увеличили в k_1 раз, а диаметр проволоки — в k_2 раз. Какой заряд разорвет новое кольцо?

1.6. Две металлические плоскости расположены под углом α_0 так, что электрического контакта между ними нет. Найти электрическое

поле между плоскостями на расстоянии r от линии пересечения. Разность потенциалов между ними U.

1.7. Плоскости двух тонких коаксиальных равномерно заряженных колец одинакового радиуса R находятся на расстоянии a друг от друга. Работа, совершаемая при переносе точечного заряда q из бесконечности в центр каждого из колец, равна соответственно A_1 и A_2. Найти заряды q_1 и q_2 колец.

1.8. На изолированный металлический шар радиуса R из бесконечности падает разреженный поток электронов. Скорость электронов на бесконечности v. На сколько повысится температура шара, если его теплоёмкость равна C?

1.9. Две стороны правильного треугольника образованы одинаковыми равномерно заряженными палочками. При этом в центре 0 треугольника потенциал равен φ_0, а напряженность электрического поля равна $\vec{E}_0$. Найти потенциал и напряженность поля в точке 0, если убрать одну из палочек.

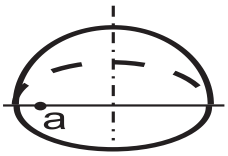
1.10. Два разноименных заряда q_1 и q_2 расположены на расстоянии a. Найти поверхность нулевого потенциала и ее положение относительно заряда q_1. При каком условии эта поверхность — плоскость?

1.11. На расстоянии $\ell > R$ от центра металлической изолированной незаряженной сферы радиуса R находится точечный заряд q. Найти: а) потенциал сферы; б) полный заряд на этой сфере после ее заземления.

1.12. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси равномерно заряженного кольца радиуса a на высоте h над плоскостью кольца. Заряд кольца равен q.

1.13. Нижняя половина сферы имеет поверхностную плотность заряда σ, а верхняя — вдвое большую. Найти электрическое поле на вертикали, проходящей через центр сферы, в точке, отстоящей на расстоянии a от центра. Радиус сферы R.

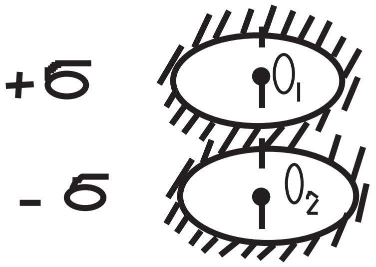
1.14. Полусфера радиуса R равномерно заряжена с поверх-



ностной плотностью σ. Найти потенциал в некоторой точке экваториальной плоскости, отстоящей на расстоянии a от оси симметрии полусферы.

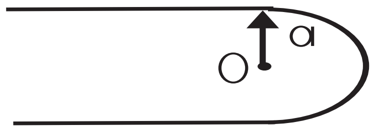
1.15. Найти потенциал φ и напряженность $\vec{E}$ электрического поля на оси z: а) круглого отверстия радиуса R, сделанного в плоскости $z = 0$; б) круглого тонкого диска радиуса R. Плоскость и диск равномерно заряжены с плотностью σ; в) равномерно заряженной бесконечной плоскости.

1.16. Две компланарные плоскости равномерно заряжены одна с



плотностью $+\sigma$, другая с плотностью $-\sigma$. В плоскостях проделаны одно над другим круглые отверстия радиуса a. Расстояние $O_1O_2 = d$. Найти напряженность электрического поля в точках O_1, O_2 и посередине между ними.

1.17. Равномерно заряженная с линейной плотностью $\varkappa$ нить об-



разует фигуру из полуокружности радиуса a и двух параллельных сопряженных с нею лучей. Найти напряженность электрического поля в точке O.

1.18. Найти давление, испытываемое сферой радиуса R, равномерно заряженной по поверхности зарядом Q.

1.2. Теорема Гаусса

1.19. Используя теорему Гаусса, найти: а) поле плоскости, заряженной с поверхностной плотностью σ; б) поле плоского конденсатора; в) поле равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити с линейной плотностью $\varkappa$.

1.20. Найти величину и направление сил, действующих на единицу длины для каждой из трех параллельных бесконечных прямых нитей,

находящихся друг от друга на расстоянии a и заряженных одна с линейной плотностью $-\varkappa$, а две других — с $+\varkappa$.

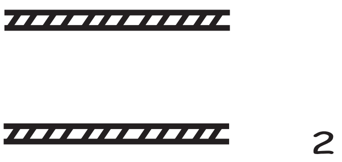
1.21. Вывести граничные условия для нормальных компонент электрического поля и соответствующих производных потенциала, если граница заряжена с поверхностной плотностью σ.

1.22. Показать, что поле вблизи поверхности металла $\vec{E} = 4\pi\sigma\vec{n}$, где $\vec{n}$ — нормаль к поверхности, а σ — поверхностная плотность зарядов.

1.23. Используя теорему Гаусса, найти поля равномерно заряженных: а) шара радиуса a (плотность ρ); б) бесконечного цилиндра радиуса a (линейная плотность $\varkappa$); в) бесконечного плоского слоя толщиной $2a$ (плотность заряда единичной площади σ).

1.24. Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного по объему с плотностью ρ, имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой R_1, а центр отстоит от центра шара на расстояние $a\,(a + R_1 < R)$. Найти электрическое поле $\vec{E}$ в полости.

1.25. Два очень больших металлических листа, расположенных один над другим, имеют поверхностную плотность зарядов σ_1 и σ_2 соответственно. Найти поверхностные плотности зарядов на внешних σ_1', σ_2' и внутренних σ_1'', σ_2'' сторонах листов.



1.26. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$ заряжено с объемной плотностью $\rho\,(r) = \alpha r^{-n}$. Найти полный заряд q и напряженность $\vec{E}$ электрического поля. Рассмотреть предельный случай $R_2 \to R_1$ при $q = \mathrm{const}$.

1.3. Диполь. Мультиполи

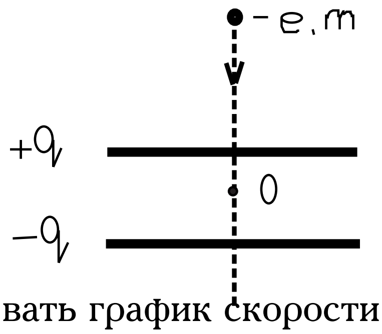
1.27. Найти потенциал и напряженность поля диполя с дипольным моментом $\vec{p}$.

1.28. Найти силу и вращательный момент, приложенные к электри-

ческому диполю с моментом $\vec{p}$ в поле точечного заряда q.

1.29. Найти силу, действующую на диполь в слабо неоднородном электрическом поле. А если диполь квазиупругий $\left(\vec{p} \sim \vec{E}\right)$?

1.30. На заряженный плоский конденсатор конечных размеров



(заряды на пластинах равны $+q$ и $-q$) налетает электрон с большого расстояния, имея там скорость v_0. Он летит по оси симметрии пластин, перпендикулярно к ним. Найти скорость в центре конденсатора. Качественно нарисовать график скорости в зависимости от расстояния до центра конденсатора.

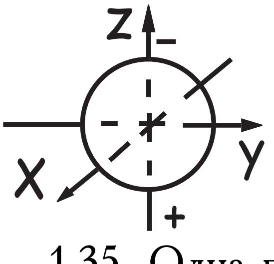
1.31. Найти уравнение силовых линий точечного диполя с дипольным моментом $\vec{d}$, помещенного в начале координат. Нарисовать примерный вид силовых линий.

1.32. а) Показать, что дипольный момент $\vec{p}$ электрически нейтральной системы зарядов $(\sum q_i = 0)$ не меняется при смещении начала координат $\left(\vec{r_i}' = \vec{a} + \vec{r_i}\right)$.

б) Если $(\sum q_i \neq 0)$, то при каком выборе $\vec{a}$ дипольный момент $\vec{p'} = 0$?

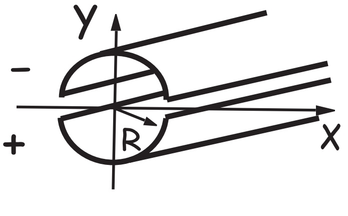
1.33. Сфера радиуса R заряжена по поверхности по закону $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Найти потенциал и электрическое поле во всем пространстве.

1.34. Одна половина сферы радиуса R покрыта зарядом с посто-



янной плотностью $+\sigma$, а другая — с плотностью $-\sigma$. Найти потенциал $\varphi(r, \theta)$ системы зарядов на большом расстоянии от центра сферы $(r \gg R)$.

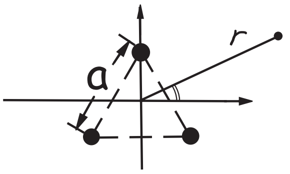
1.35. Одна половина бесконечно длинной заряженной цилиндри-



ческой поверхности имеет поверхностную плотность заряда $+\sigma$, другая $-\sigma$. Найти напряженность электрического поля на оси цилиндра.

1.36. Найти поле линейного диполя: две параллельные бесконечные нити, расположенные на расстоянии a друг от друга, заряженные с линейными плотностями $\pm\varkappa$.

1.37. Три бесконечных заряженных нити (линейная плотность заряда $\varkappa$) расположены на расстоянии a друг от друга. Найти два первых (отличных от нуля!) члена разложения потенциала на больших расстояниях.



1.38. Показать, что тензор квадрупольного момента аксиального симметричного распределения зарядов имеет лишь одну независимую компоненту. Вычислить потенциал $\varphi(r, \theta)$ аксиально-симметричного квадруполя с моментом $Q_{zz} = Q$; $Q_{xx} = Q_{yy} = -Q/2$.

1.39. Найти потенциал $\varphi(r)$ поля двух концентрических колец радиусом a и b с зарядами q и $-q$ для: а) $r \gg a, b$ и б) $r \ll a, b$.

1.40. Тонкое круглое кольцо радиуса R состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами q и $-q$. Найти потенциал и напряженность электрического поля на оси кольца и вблизи нее. Каков характер поля на больших расстояниях от кольца (положительное заряженное полукольцо занимает область $x > 0$ плоскости XY).

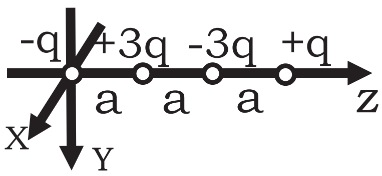
1.41. Найти заряд, дипольный и квадрупольный моменты диска радиуса a, равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ и находящегося на расстоянии h от начала координат.

1.42. Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) заряды q, $-2q$, q расположены на оси Z на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь);
б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата, стороны которого параллельны осям X и Y, так что соседние заряды имеют разные знаки, а в начале координат расположен заряд $+q$ (плоский квадруполь).

1.43. Найти уравнение силовых линий линейного квадруполя и нарисовать примерную картину силовых линий.

1.44. Найти потенциал электрического поля на больших расстояниях от линейного октуполя.

1.45. Оцените потенциал 2^n-мультиполя, занимающего область с характерным размером a на большом расстоянии от него.



1.4. Уравнения Пуассона и Лапласа

1.46. Найти распределение зарядов, создающих потенциал Юкавы $\varphi = \frac{q}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$.

1.47. Используя уравнение Пуассона, симметрию задачи, конечность и непрерывность потенциала и его производной, найти потенциал: а) шара, равномерно заряженного по объему с объемной плотностью ρ; б) цилиндра, равномерно заряженного по объему с линейной плотностью $\varkappa$; в) слоя толщиной $2a$, равномерно заряженного с объемной плотностью ρ. (Радиусы в пунктах *а* и *б* — R).

1.48. Найти поле между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов r_1 и r_2, разность потенциалов между которыми равна U.

1.49. Плоскость $z = 0$ заряжена с плотностью $\sigma\left(x, y\right) = \sigma_0 \sin\left(\alpha x\right) \cdot \sin\left(\beta y\right)$, где σ_0, α, β — постоянные. Найти потенциал этой системы зарядов.

1.50. В основном состоянии атома водорода заряд электрона $(-e)$ распределен с объемной плотностью $\rho = \left(-e/\pi a^3\right)\exp\left(-2r/a\right)$, где a — боровский радиус, r — расстояние до центра атома. Вычислить классические значения: а) потенциала; б) напряженности поля внутри атома; в) энергии взаимодействия между ядром и электронным облаком.

1.51. Незаряженный металлический шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое при отсутствии шара было однородным и равным $\vec{E}_0$. Определить результирующее поле и плотность поверхностных зарядов на шаре. Что изменится, если заменить шар цилиндром,

ось которого перпендикулярна полю?

1.52. Доказать невозможность устойчивого равновесия заряженной частицы в электростатическом поле (теорема Ирншоу).

1.53. Одна грань прямоугольного параллелепипеда находится под потенциалом U. Все прочие грани имеют нулевой потенциал. Найти распределение потенциала внутри параллелепипеда.

1.54. Показать, что потенциал тонкого круглого кольца (радиус R, диаметр сечения $d \ll R$) вблизи нити кольца на расстоянии $\rho \ll R$ от нее равен $\varphi = \frac{Q}{2\pi R} \ln \frac{8R}{\rho}$, где Q — заряд кольца.

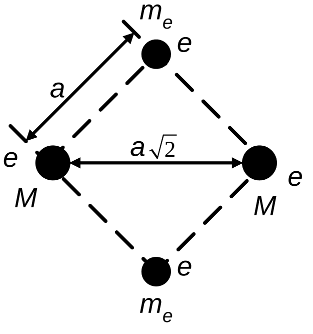
1.5. Решение типичных задач

Р.1. В противоположных вершинах квадрата со стороной a оказались два протона (заряды $+e$, массы M) и два позитрона (заряды $+e$, массы $m_e \ll M$) — все с нулевыми скоростями. Оценить скорости частиц после полного «развала» системы.

Энергия взаимодействия данной системы зарядов равна

$$U = 2\frac{e \cdot e}{a} + 2\frac{e \cdot e}{a} + 2\frac{e \cdot e}{a\sqrt{2}} = (4 + \sqrt{2})\frac{e^2}{a}.$$

Поскольку ускорение каждой частицы $\sim 1/m$, а $m_e \ll M$, то



время, через которое позитроны разлетятся на достаточно большие расстояния, когда можно пренебречь их энергией взаимодействия, много меньше такового для протонов. Поэтому, чтобы оценить скорости позитронов, можно считать, что протоны не успели сдвинуться со своих мест, когда позитроны уже разлетелись далеко. Для такой ситуации закон сохранения энергии запишется следующим образом:

$$(4 + \sqrt{2})\frac{e^2}{a} = 2 \cdot \frac{m_e v_e^2}{2} + \frac{e^2}{a\sqrt{2}},$$

откуда для скорости позитронов при $m_e \ll M$ получаем выражение

$$v_e = \left[\frac{e^2}{m_e a}\left(1/\sqrt{2}+4\right)\right]^{1/2}.$$

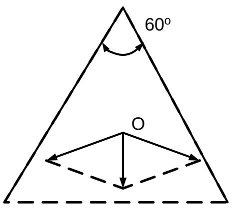
Для протонов закон сохранения энергии будет выглядеть так:

$$\frac{e^2}{\sqrt{2}\,a} = 2\cdot\frac{Mv_p^2}{2},$$

и, значит, скорости протонов $v_p \simeq (e^2/\sqrt{2}Ma)^{1/2}$ при $m_e \ll M$.

Р.2. Две стороны правильного треугольника образованы одинаковыми равномерно заряженными палочками. При этом в центре O треугольника потенциал равен φ_0, а напряженность электрического поля равна $\vec{E}_0$. Найти потенциал и напряженность поля в точке O, если убрать одну из палочек.

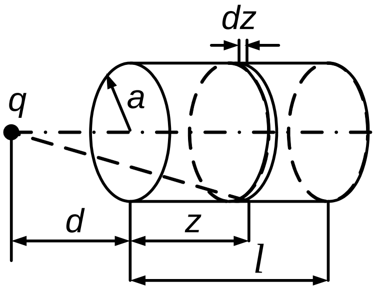
Потенциал в точке O создается двумя одинаковыми палочками. Поскольку потенциал — скалярная функция, а точка O расположена симметрично относительно палочек, то каждая из палочек вносит вклад в общий потенциал, равный $\varphi_0/2$. Поэтому если убрать одну



палочку, то потенциал в точке O будет $\varphi_0/2$. Напряженность электрического поля, создаваемая одной палочкой в точке O, направлена перпендикулярно палочке, в силу симметрии расположения точки O по отношению к палочке. Результирующее поле $\vec{E}_0$ из принципа суперпозиции полей есть векторная сумма двух одинаковых по абсолютной величине векторов, расположенных под углом $2\pi/3$. Значит, каждый из векторов имеет длину, равную длине E_0. Если убрать одну из заряженных палочек, то вектор поля будет направлен перпендикулярно оставшейся палочке, а по величине останется равным E_0. Результат становится очевидным, если дополнить до правильного треугольника систему из двух палочек, соединив

их свободные концы третьей заряженной палочкой. Ее поле компенсирует до нуля поле двух палочек в точке O (это видно из симметрии задачи), т. е. поле двух палочек $\vec{E}_0$ равно по величине и противоположно по направлению полю одной дополнительной палочки.

Р.3. Какую скорость нужно сообщить частице с массой m и зарядом q, чтобы она смогла пролететь по оси тонкого равномерно заряженного полого цилиндра. Заряд цилиндра — Q, длина — l, радиус — a. Внутри или вне цилиндра зарядом испытывается наибольшее ускорение?



Потенциал, создаваемый зарядом цилиндрического слоя ширины dz в точке оси, расположенной на расстоянии d от края цилиндра, равен

$$d\varphi = \frac{Q}{l}\frac{dz}{\sqrt{a^2 + (d+z)^2}}.$$

Потенциал, создаваемый всем зарядом цилиндра, равен

$$\varphi = \frac{Q}{l}\ln\frac{d + l + \sqrt{(d+l)^2 + a^2}}{d + \sqrt{d^2 + a^2}}.$$

Этот потенциал равен нулю при $d \to \pm\infty$ и максимален в центральной точке оси, так как в этой точке напряженность электрического поля в силу симметрии системы равна нулю, т. е. $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial d}\right|_{d=-l/2}$. Из закона сохранения энергии получим

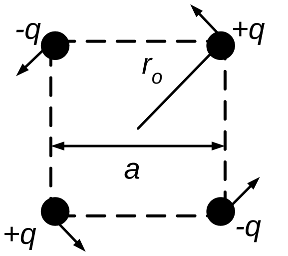
$$\frac{mv^2}{2} = q\frac{Q}{l}\ln\frac{\sqrt{l^2+4a^2}+l}{\sqrt{l^2+4a^2}-l},$$

откуда

$$v > \left(\frac{2qQ}{ml}\ln\frac{\sqrt{l^2+4a^2}+l}{\sqrt{l^2+4a^2}-l}\right)^{1/2}.$$

Максимум ускорения достигается вне цилиндра.

Р.4. Частицы массы m каждая и с зарядами ($\pm q$) расположены в углах квадрата со стороной a, как показано на рисунке.



В некоторый момент времени каждой из них сообщается скорость $\vec{v}_0$, направленная перпендикулярно диагонали квадрата, на которой она находится. Какова должна быть величина этой скорости, чтобы частицы двигались по окружности радиуса, равного половине длины диагонали квадрата $r_0 = a/\sqrt{2}$? Описать движение частиц, если их начальные скорости будут: а) меньше v_0 в 2 раза; б) больше v_0 в 2 раза.

Начальный импульс системы частиц равен нулю, значит, центр масс будет находиться в покое. Из симметрии расположения зарядов, их величин и масс очевидно, что каждая из частиц движется в центрально-симметричном поле трех остальных частиц. При движении они будут сохранять симметрию расположения, т. е. в каждый данный момент времени будут находиться в углах некоторого квадрата с центром в центре масс (центре квадрата).

Запишем закон сохранения энергии для системы четырех частиц в полярной системе координат (r, α) с началом в центре квадрата, поскольку движение частиц будет плоское

$$4\frac{mv_r^2}{2} + 4\frac{mv_\alpha^2}{2} - 4\frac{q^2}{r\sqrt{2}} + 2\frac{q^2}{2r} = \mathcal{E}_0, \qquad (1)$$

где

$$\mathcal{E}_0 = 4\frac{mv_0^2}{2} - 4\frac{q^2}{a} + \frac{\sqrt{2}\,q^2}{a}.$$

Используя закон сохранения момента $M = 4mv_0r_0 = 4mv_\alpha r$ и деля левую и правую части уравнения (1) на четыре, находим

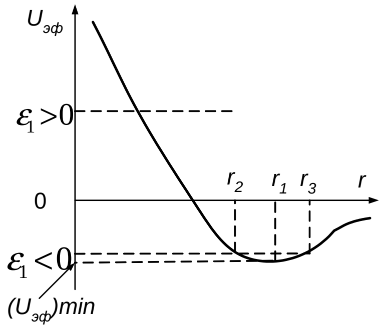
$$\frac{mv_r^2}{2} + \frac{M_1^2}{2mr^2} - \frac{q^2}{r\sqrt{2}} + \frac{q^2}{4r} = \mathcal{E}_1, \qquad (2)$$

где $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0/4,\ M_1 = M/4$.

Уравнение (2) описывает радиальное движение частицы в некотором эффективном потенциальном поле

$$U_{\text{эф}} = \frac{M_1^2}{2mr^2} - \frac{q}{r}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right). \tag{3}$$

При $M_1 \neq 0$ график этой функции имеет вид, показанный на рисунке.



Понятно, что если $\mathcal{E}_1 < 0$, движение частиц будет финитное, при $\mathcal{E}_1 \geq 0$ — инфинитное. Если $\mathcal{E}_1$ будет равно минимальному значению $U_{\text{эф}}$, то частицы будут двигаться по окружности. Взяв производную по r от $U_{\text{эф}}$ и приравняв ее нулю, получим, что расстояние r_1 частиц от центра до точки, в которой $U_{\text{эф}}$ принимает минимальное значение, равно

$$r_1 = \frac{M_1^2}{mq^2}\,\frac{4}{2\sqrt{2}-1}. \tag{4}$$

Подставим $r = r_1$ в уравнение (3), получим

$$(U_{\text{эф}})_{min} = -\frac{mq^4}{2M_1^2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^2.$$

Из условия $\mathcal{E}_1 = (U_{\text{эф}})_{min}$ найдем, что скорость v_0, которую нужно сообщить частицам, чтобы они двигались по окружности:

$$v_0 = \left(\frac{q^2}{mr_0}\,\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^{1/2},$$

где $r_0 = a/\sqrt{2}$ — начальная координата частицы. Скорость v_0 проще найти, положив в (4) $r_1 = r_0$.

а) Если начальную скорость уменьшить в 2 раза по сравнению с v_0 , т. е. положить

$$v_{\text{нач}} = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{mr_0}\,\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\right)^{1/2},$$

тогда

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{7}{8}\frac{q^2}{r_0}\,\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\,.$$

Из равенства $\mathcal{E}_1 = U_{\text{эф}}(r)$ найдем, что $r_2 = r_0/7$ и $r_3 = r_0$. Итак, в этом случае минимальное расстояние частиц до центра квадрата равно $r_0/7$, максимальное — r_0. Сначала частицы начнут сближаться, их радиальные скорости будут возрастать, пока $U_{\text{эф}}$ не достигнет своего минимального значения. Затем радиальные скорости начнут уменьшаться. При $r = r_0/7$ радиальные скорости обратятся в нуль, а затем частицы начнут расходиться.

б) Если начальную скорость увеличить в 2 раза, то $\mathcal{E}_1$ будет равно

$$\mathcal{E}_1 = \frac{q^2}{r_0}\,\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\,.$$

Эта величина больше нуля, частицы разойдутся на бесконечные расстояния.

Р.5. Три концентрических проводящих сферы радиусов $r_1 < r_2 < r_3$ изолированы, причем средняя сфера имела заряд Q, а крайние не заряжены. Найти заряд на наружной сфере после ее соединения с внутренней проводником, изолированным от средней сферы.

До соединения двух сфер проводником потенциалы первой, второй и третьей сфер были соответственно равны

$$\varphi_1 = \frac{Q}{r_2}\,,\ \varphi_2 = \frac{Q}{r_2}\,,\ \varphi_3 = \frac{Q}{r_3}\,.$$

Потенциал $\varphi_1 > \varphi_3$. Значит, после соединения крайних сфер проводником отрицательный заряд с внутренней поверхности сферы радиуса r_3 будет перетекать на сферу радиуса r_1. Пусть на внутренней сфере возникнет заряд $-Q_1$, тогда на внешней сфере будет заряд $+Q_1$. Напряженность электрического поля для $r > r_3$ останется равной $E = Q/r^2$, поскольку суммарный заряд трех сфер

не изменился. Значит, потенциал внешней сферы останется равным $\varphi_3 = Q/r_3$.

При $r_2 < r < r_3$, т. е. между второй и третьей сферами,

$$E = \frac{Q - Q_1}{r^2}, \qquad \varphi = \frac{Q - Q_1}{r} + \mathrm{const}\ .$$

Из условия непрерывности потенциала при $r = r_3$ найдем, что $\mathrm{const} = Q_1/r_3$. Тогда

$$\varphi = \frac{Q - Q_1}{r} + \frac{Q_1}{r_3} \quad \text{при} \quad r_2 < r < r_3$$

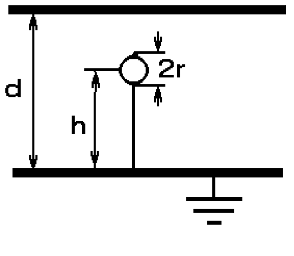
и

$$E = -\frac{Q_1}{r^2}, \qquad \varphi = -\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_1}{r_3} + \frac{Q}{r_2} \quad \text{при} \quad r_1 < r < r_2\,.$$

Сферы 1 и 3 имеют одинаковый потенциал, поскольку они соединены проводником. Из условия $\varphi_1 = \varphi_3$ найдем, что

$$Q_1 = Q\,\frac{r_1}{r_2}\,\frac{r_3 - r_2}{r_3 - r_1}\,.$$

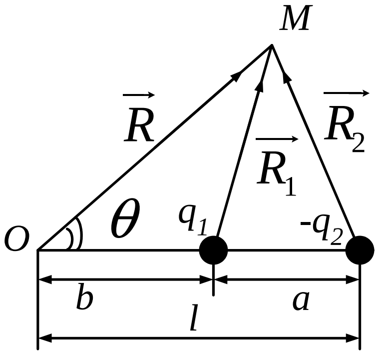
Р.6. Внутри плоского конденсатора, заряженного до напряжения U, на расстоянии h от пластины с нулевым потенциалом находится маленький металлический шарик радиуса r. Пренебрегая искажением поля конденсатора, найти заряд, появившийся на шарике, если соединить шарик с пластиной нулевого потенциала. Расстояние между пластинами равно d.



Напряженность электрического поля в конденсаторе $E = U/d$. Потенциал шарика равен потенциалу поля в месте нахождения шарика $\varphi_{\text{ш}} = Uh/d$. После присоединения шарика к пластине с нулевым потенциалом его потенциал тоже станет равным нулю. Заряд, который появится на шарике, создаст собственный потенциал, равный и

противоположный по знаку потенциалу поля конденсатора в месте нахождения шарика. Поэтому этот заряд $q = -\varphi_{ш} r = -Uhr/d$.

P.7. Два заряда q_1 и $-q_2$ расположены на расстоянии a. Найти поверхность нулевого потенциала и ее положение относительно заряда q_1. При каком условии эта поверхность — плоскость?



Для удобства рассмотрения введем сферическую систему координат с центром в точке O на расстоянии b от заряда q_1 на продолжении линии, соединяющей заряды q_1 и $-q_2$ (см. рисунок). Тогда потенциал в точке M, определяемой координатами R, θ, при любом значении меридианного угла выразится равенством

$$\varphi = \frac{q_1}{R_1} - \frac{q_2}{R_2} = \frac{q_1}{\sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}} - \frac{q_2}{\sqrt{R^2 + l^2 - 2Rl\cos\theta}}, \tag{1}$$

где l — расстояние от заряда $-q_2$ до начала координат. Выражение (1) запишем следующим образом:

$$\varphi = \frac{q_1}{R}\left[\left(1+\frac{b^2}{R^2}-\frac{2b}{R}\cos\theta\right)^{-1/2} - \left(\frac{q_1^2}{q_2^2}+\frac{l^2q_1^2}{R^2q_2^2}-\frac{2lq_1^2}{Rq_2^2}\cos\theta\right)^{-1/2}\right],$$

откуда видно, что потенциал обращается в нуль при любом угле θ, если одновременно выполняются следующие равенства:

$$1 + \frac{b^2}{R^2} = \frac{q_1^2}{q_2^2} + \frac{l^2q_1^2}{R^2q_2^2}; \tag{2}$$

$$\frac{b}{R} = \frac{lq_1^2}{Rq_2^2}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) с учетом равенства $l = a + b$ находим

$$b = a\frac{q_1^2}{q_2^2 - q_1^2}.$$

Подставляя найденное значение b в уравнение (2), получаем

$$R = a\,\frac{q_1q_2}{q_2^2 - q_1^2}\,.$$

На сфере радиуса $R = aq_1q_2/(q_2^2 - q_1^2)$, центр которой расположен на расстоянии $b = aq_1^2/(q_2^2 - q_1^2)$ от заряда (см. рисунок), потенциал обращается в нуль, при этом $q_1 < q_2$. Сфера охватывает заряд q_1. Если $q_2 < q_1$, то центр сферы находится со стороны заряда q_2 на продолжении линии, соединяющей заряды q_1 и $-q_2$. Сфера нулевого потенциала охватывает заряд $-q_2$. В этом случае $R = aq_1q_2/(q_1^2 - q_2^2)$, а расстояние центра сферы до заряда $-q_2$ равно $b = aq_2^2/(q_1^2 - q_2^2)$. Естественно, те же результаты получатся и при рассмотрении задачи, в декартовой системе координат.

Если заряды равны по абсолютной величине, тогда $q/R_1 = q/R_2$ и, следовательно, $R_1 = R_2$. Потенциал обращается в нуль на плоскости, проходящей через середину линии, соединяющей заряды и перпендикулярной ей, т. е. сфера переходит в плоскость.

Р.8. Найти потенциал φ и напряженность $\vec{E}$ электрического поля: а) на оси Z круглого тонкого диска радиуса R; б) равномерно заряженной бесконечной плоскости; в) на оси Z круглого отверстия радиуса R, сделанного в плоскости $z = 0$. Плоскость и диск равномерно заряжены с плотностью σ.

Электрическое поле $\vec{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

и, значит, является потенциальным, т. е. таким полем, в котором работа сил поля при перемещении заряда из одной точки в другую не зависит от пути, по которому производится его перемещение, а зависит только от расположения начальной и конечной точек. Потенциальность поля обусловливает существование такой скалярной функции, называемой потенциалом φ, разностью значений которой в ко-

нечной и начальной точках пути определяется работа по перемещению единичного заряда. Потенциал φ вводится соотношением

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{2}$$

Представленный таким образом вектор $\vec{E}$ является решением уравнения (1), поскольку ротор градиента всегда равен нулю. Если в уравнении (2) φ заменить на $\varphi + \mathrm{const}$, то $\vec{E}$ от этого не изменится. Таким образом, потенциал является вспомогательной величиной и определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Численная величина не может быть измерена на опыте. Физическое значение имеет лишь разность потенциалов между двумя точками, что соответствует работе A при перемещении единичного заряда между этими точками:

$$A = \int\limits_c^d (\vec{E}\, d\vec{l}) = \int\limits_c^d (\operatorname{grad}\varphi d\vec{l}) =$$

$$= -\int\limits_c^d \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = -\int\limits_c^d d\varphi = \varphi(c) - \varphi(d)\,.$$

Таким образом, потенциал в любой фиксированной точке можно сделать равным любой наперед заданной величине. Тогда потенциал всех остальных точек оказывается определенным однозначно. Если заряды расположены в конечной области пространства, то обычно потенциал выбирается равным нулю на бесконечности. Для системы точечных зарядов

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{R_i}, \tag{3}$$

где R_i — расстояние от заряда q_i до точки, в которой вычисляется потенциал φ. При непрерывном распределении заряда

$$\varphi = \int \frac{dq}{R} = \int\limits_V \frac{\rho\, dv}{R} + \int\limits_S \frac{\sigma\, ds}{R} + \int\limits_L \frac{\eta\, dl}{R}, \tag{4}$$

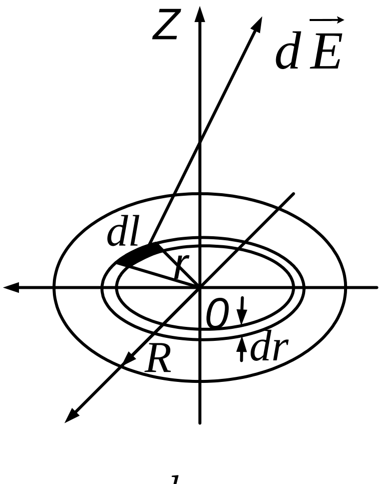
где ρ, σ, η — соответственно объемная, поверхностная и линейная плотности зарядов; R — расстояние до точки, в которой вычисляется потенциал от зарядов $\rho\, dv$ в первом интеграле, $\sigma\, ds$ — во втором, $\eta\, dl$ — в третьем; dv, ds, dl — соответственно элементарные объем, площадь, длина. Интегралы берутся по всему объему, где $\rho \neq 0$, по поверхности, где $\sigma \neq 0$, по линии, где $\eta \neq 0$.

Если заряды не расположены в конечной области пространства, то не всегда можно выбрать потенциал так, чтобы на бесконечности он был равен нулю, и путь прямого вычисления потенциала по формуле (4) может приводить к появлению расходимостей, поскольку эта формула является обобщением формулы (3) для потенциала от системы точечных зарядов, для которых потенциал принимается равным нулю на бесконечности. В этих случаях удобнее сводить задачу о нахождении потенциала к решению дифференциального уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Иногда проще сначала найти $\vec{E}$, например, по теореме Гаусса в задачах с определенной симметрией распределения заряда (см. Р.9), а затем, обратив уравнение (1), найти потенциал по формуле

$$\varphi = -\int (\vec{E}\, d\vec{R}) + \mathrm{const}, \tag{5}$$

подобрав константу так, чтобы потенциал имел более простой вид.

а) Потенциал будем вычислять по формуле (4). Выделим на диске кольцо радиуса r ширины dr. На элементе длины кольца $dl = r\, d\alpha$ находится количество заряда



$$dq = \sigma\, dl\, dr = \sigma r\, dr\, d\alpha\,.$$

Потенциал, создаваемый этим зарядом на оси на расстоянии z от диска, равен $dq/\sqrt{z^2 + r^2}$. Потенциал, создаваемый кольцом радиуса r ширины dr,

$$d\varphi = \frac{2\pi\sigma r\,dr}{\sqrt{z^2 + r^2}}\,.$$

Тогда

$$\varphi = 2\pi\sigma \int\limits_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = 2\pi\sigma\left(\sqrt{z^2 + R^2} - |z|\right), \qquad (6)$$

откуда

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2\pi\sigma\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right). \qquad (7)$$

б) Пусть бесконечная заряженная плоскость занимает положение плоскости (x, y). В силу симметрии распределения зарядов, вектор $\vec{E}$ электрического поля может зависеть только от координаты z и должен быть перпендикулярен плоскости. Он направлен к плоскости, если ее заряд отрицателен. Поэтому напряженность электрического поля для равномерно заряженной бесконечной плоскости можно найти предельным переходом при $R \to \infty$ в формуле (7) для поля, создаваемого диском радиуса R на оси диска. Получаем

$$E_z = 2\pi\sigma\frac{z}{|z|}\,.$$

Заметим, что предельный переход в формуле (6) для потенциала приводит к бесконечности. Это как раз тот случай возникновения трудности с применением формулы (4), о котором говорилось выше. Распределение потенциала находим, используя формулу (5):

$$\varphi = -2\pi\sigma|z| + \mathrm{const}\,.$$

Константу положим равной нулю. Это означает, что мы выбрали равным нулю потенциал самой плоскости. Окончательно

$$\varphi = -2\pi\sigma|z|\,.$$

Напряженность электрического поля на заряженной плоскости терпит скачок, равный $4\pi\sigma$, как и следует из граничного условия

$$E_{2n}| - E_{1n}| = 4\pi\sigma.$$

в) Поле, создаваемое плоскостью с отверстием, можно рассматривать как суперпозицию двух полей: поля плоскости без отверстия, заряженной с плотностью σ, и поля диска радиуса R, заполняющего отверстие и заряженного с плотностью $-\sigma$. Поэтому

$$E_z = 2\pi\sigma \frac{z}{|z|} - 2\pi\sigma \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) = 2\pi\sigma \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\,.$$

Распределение потенциала на оси отверстия

$$\varphi = \int E_z\,dz + \mathrm{const} = -2\pi\sigma\sqrt{R^2+z^2} + \mathrm{const}\ .$$

Константу можно выбрать равной нулю, это будет означать, что потенциал в центре отверстия $\varphi(0) = -2\pi\sigma R$.

Р.9. Используя теорему Гаусса, найти поля равномерно заряженных:

а) шарика радиуса a с объемной плотностью ρ;

б) бесконечного цилиндра радиуса a с линейной плотностью η;

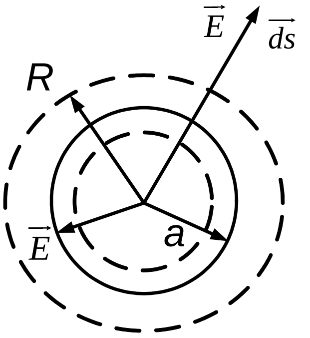
в) бесконечного плоского слоя толщины $2a$ с объемной плотностью заряда ρ.

Эти задачи, обладают такой симметрией распределения зарядов, что можно, не решая, указать поверхности, на которых напряженность электрического поля $\vec{E}$ перпендикулярна ей в каждой точке и постоянна по величине. Для нахождения поля $\vec{E}$ в таких задачах достаточно применения теоремы Гаусса, смысл которой для вакуума состоит в следующем: поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S равен полному заряду, заключенному внутри нее (умноженному на 4π в системе $CGSE$). Математическое выражение теоремы Гаусса имеет вид

$$\oint\limits_S (\vec{E}\,d\vec{s}) = 4\pi \int\limits_V \rho\,dv, \qquad (1)$$

где $d\vec{s}$ — вектор, по величине равный величине элементарной площадки ds, а по направлению совпадает с направлением внешней нормали к этой площадке, т. е. нормали, направленной наружу; ρ — объемная плотность заряда. Интеграл с левой стороны есть поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S. Под интегралом соответсвенно стоит скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $d\vec{s}$, равное потоку вектора $\vec{E}$ через малую площадку ds. Интеграл с правой стороны берется по объему, заключенному внутри поверхности, и равен полному заряду, находящемуся в нем. Успех решения с помощью соотношения (1) обусловливается тем, что, выбирая поверхность интегрирования, на которой напряженность поля E постоянна, можно E вынести за знак интеграла и тогда это соотношение дает возможность найти $\vec{E}$.

a) Совместим начало сферической системы координат с центром шара. Ввиду сферической симметрии распределения заряда ясно, что вектор $\vec{E}$ может быть направлен только вдоль радиуса и зависеть только от величины радиуса. Поток вектора $\vec{E}$ через сферическую поверхность радиуса R независимо от величины радиуса запишется так:



$$\Phi = \oint\limits_S (\vec{E}\, d\vec{s}) = E \oint\limits_S ds = E \cdot 4\pi R^2,$$

если $\vec{E}$ параллелен радиус-вектору $\vec{R}$ и $\Phi = -E \cdot 4\pi R^2$, если $\vec{E}$ антипараллелен $\vec{R}$, поскольку косинус угла между $\vec{E}$ и $d\vec{s}$ будет равен (-1).

С другой стороны,

$$4\pi \int\limits_V \rho dv = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \text{при} \qquad R \leq a$$

и

$$4\pi \int\limits_V \rho dv = 4\pi\rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \qquad \text{при} \qquad R > a\,.$$

Поэтому

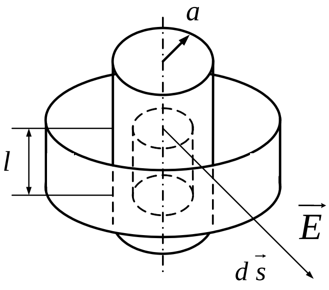
$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{R} \qquad \text{при} \qquad R \le a,$$

$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{Q}{R^3}\vec{R} \qquad \text{при} \qquad R > a\,,$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$ — полный заряд шара.

Таким образом, равномерно заряженный шар создает во внешнем пространстве такое поле, как если бы весь заряд был сосредоточен в его центре. Этот результат остается справедливым при любом сферически симметричном распределении заряда по объему шара.

б) Для бесконечного равномерно заряженного цилиндра вектор напряженности электрического поля лежит в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, и может зависеть только от расстояния от точки наблюдения до оси цилиндра. В цилиндрической системе координат с осью Z вдоль оси цилиндра вектор напряженности $\vec{E}$ направлен вдоль $\vec{r}$. Построим два коаксиальных цилиндра длины l с радиусами $r < a$ и $r > a$.



Поток вектора $\vec{E}$ через поверхность каждого из цилиндров запишется так

$$\Phi = \oint\limits_S (\vec{E}\,d\vec{s}) = E\oint\limits_S ds = E\cdot 2\pi rl.$$

При вычислении потока мы считали, что $\rho > 0$, и, значит, вектор $d\vec{s}$ направлен по $\vec{r}$. Поток вектора $\vec{E}$ через торцы цилиндров равен нулю, поскольку на них $\vec{E}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны.

С другой стороны,

$$4\pi\int\limits_V \rho\,dv = 4\pi\frac{\eta}{\pi a^2}\int\limits_V dv = \frac{4\eta}{a^2}\pi r^2 l \qquad \text{при} \qquad r < a,$$

$$4\pi\int\limits_V \rho\,dv = 4\pi\rho\cdot\pi a^2 l = 4\pi\eta\,l \qquad \text{при} \qquad r \ge a.$$

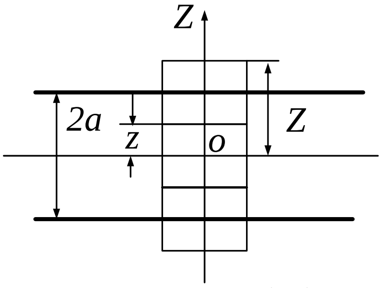
Подставляя найденные значения в уравнение (1), получаем

$$\vec{E} = \frac{2\eta}{a^2}\vec{r} \qquad \text{при} \qquad r \le a,$$

$$\vec{E} = \frac{2\eta}{r^2}\vec{r} \qquad \text{при} \qquad r > a.$$

в) Пусть средняя плоскость пластинки занимает положение плоскости $(x\,,\,y)$. В силу симметрии распределения заряда относительно плоскости $(x\,,\,y)$, вектор $\vec{E}$ может зависеть только от координаты z и направлен от плоскости, если пластина заряжена положительно, и к плоскости, если ее заряд отрицателен.

Построим куб с основаниями, симметрично расположенными по разные стороны от средней плоскости. Если S — площадь каждого основания, то поток вектора $\vec{E}$ через оба основания равен $2ES$.



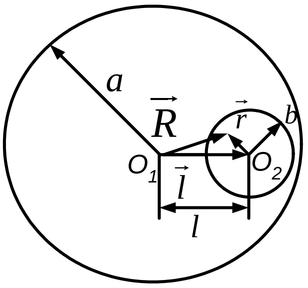
Поток через боковую поверхность куба равен нулю, так как на ней векторы $\vec{E}$ и $d\vec{s}$ взаимно перпендикулярны. Значит, поток через поверхность куба равен $2ES$. С другой стороны, правая сторона выражения (1) будет равна: $4\pi\eta S \cdot |z|$, если $z \le a$, и $4\pi\eta S \cdot 2a$, если $z > a$. Поэтому

$$\vec{E} = 4\pi\eta\vec{z} \quad \text{при} \quad |z| \le a\ ,$$

$$\vec{E} = 4\pi\eta a\frac{\vec{z}}{z} \quad \text{при} \quad |z| > a\ .$$

Р.10. Внутри шара радиуса a, равномерно заряженного по объему с плотностью ρ, имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой b, а центр отстоит от центра шара на расстоянии l таком, что $(l + b < a)$. Найти электрическое поле $\vec{E}$ в полости.

Поле, создаваемое шаром с полостью, можно рассматривать как



суперпозицию двух полей: поля сплошного шара радиуса a, заряженного с плотностью ρ, и поля сплошного шара радиуса b, заполняющего полость с объемной плотностью $-\rho$. Нулевой заряд полости представлен как $\rho + (-\rho) = 0$. Тогда, используя результат задачи Р.9а, находим поле в полости

$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{R} - \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r} = \frac{4}{3}\pi\rho\,\vec{l}\,.$$

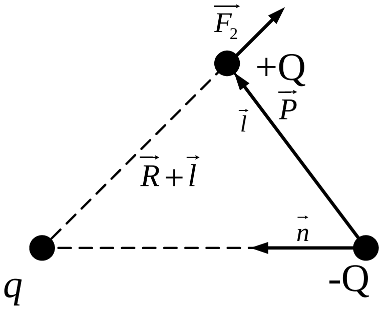
Поле внутри полости однородное и направлено по линии, соединяющей центр шара с центром полости, в сторону центра полости.

Р.11. Найти силу и вращательный момент, приложенные к электрическому диполю с моментом $\vec{P}$ в поле точечного заряда q.

Сила, действующая на диполь в поле точечного заряда q, является суммой сил, действующих на заряды диполя со стороны заряда q:

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = Q(\vec{E_2} - \vec{E_1})\,, \qquad (1)$$

где $\vec{E_1}$ — напряженность электрического поля, создаваемая зарядом q в точке нахождения отрицательного заряда диполя ($-Q$); $\vec{E_2}$ — в точке нахождения положительноного заряда диполя. Если



расстояние между зарядами диполя мало по сравнению с расстоянием, на котором находится диполь от заряда, то поле $\vec{E_2}$ можно разложить в ряд Тейлора и оставить в нем два первых отличных от нуля члена

$$\vec{E_2} = \vec{E}(\vec{R} + \vec{l}) =$$

$$= \vec{E}(\vec{R}) + l_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + l_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + l_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z} \approx \vec{E_1} + (\vec{l}\vec{\nabla})\vec{E}\,,$$

где $(\vec{l}\vec{\nabla})$ — скалярное произведение вектора $\vec{E}$ и вектора $\vec{\nabla} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$. Подставим $\vec{E_2}$ в уравнение (1) и учитывая,

что $\vec{P} = Q\vec{l}$, $\vec{E} = \frac{Q}{R^3}\vec{R}$, находим выражение для силы, действующей на диполь со стороны точечного заряда:

$$\vec{F} = (\vec{P}\vec{\nabla})\frac{q}{R^3}\vec{R} = q\left(P_x\frac{\partial}{\partial x} + P_y\frac{\partial}{\partial y} + P_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\vec{R}}{R^3}. \qquad (2)$$

Так как

$$P_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = P_x\left(\frac{1}{R^3}\frac{\partial\vec{R}}{\partial x} + \vec{R}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right)\right) = P_x\left(\frac{\vec{i}}{R^3} - \frac{3\vec{R}}{R^5}x\right),$$

то аналогично

$$P_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = P_y\left(\frac{\vec{j}}{R^3} - \frac{3\vec{R}}{R^5}y\right), \quad P_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = P_z\left(\frac{\vec{k}}{R^3} - \frac{3\vec{R}}{R^5}z\right),$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы в направлениях соответственно X, Y, Z. Подставляя вычисленные соотношения в уравнение (2), получаем

$$\vec{F} = q\left(\frac{\vec{P}}{R^3} - \frac{3(\vec{P}\,\vec{R})\vec{R}}{R^5}\right). \qquad (3)$$

Сила, действующая на диполь в поле точечного заряда, равна по абсолютной величине и противоположна по направлению силе, действующей на заряд в поле диполя. Поэтому из формулы (3) следует, что поле, создаваемое диполем в точке, определяемой радиус-вектором $\vec{R}$ на больших расстояниях, будет иметь вид

$$\vec{E}_{\text{дип}} = \frac{\vec{P}}{R^3} - \frac{3(\vec{P}\,\vec{R})\vec{R}}{R^5}.$$

Момент сил, действующий на диполь во внешнем поле $\vec{E}$, равен $\vec{N} = [\vec{P}\times\vec{E}]$. Подставляя в эту формулу поле точечного заряда $\vec{E} = q\vec{R}/R^3$, получаем

$$\vec{N} = q\,\frac{[\vec{P}\times\vec{R}]}{R^3},$$

где $\vec{R}$ — радиус-вектор, проведенный из точки нахождения точечного заряда q в точку, где находится диполь.

Р.12. а) Показать, что дипольный момент $\vec{P}$ электрически нейтральной системы зарядов $\sum\limits_i q_i = 0$ не меняется при смещении начала координат.

б) При каком выборе вектора смещения $\vec{d}$ дипольный момент $\vec{P}\,' = 0$, если $\sum\limits_i q_i \neq 0$?

а) Пусть в некоторой системе координат радиус-вектор положения заряда q_i есть $\vec{R}_i$, тогда дипольный момент системы зарядов в этой системе координат $\vec{P} = \sum\limits_i q_i\vec{R}_i$. Сдвинем начало координат на некоторый вектор $\vec{d}$, тогда положение каждого заряда в новой системе будет $\vec{R}_i' = \vec{R}_i - \vec{d}$ и

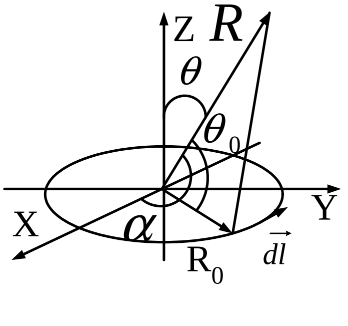
$$\vec{P}\,' = \sum_i q_i\vec{R}_i' = \sum_i q_i(\vec{R}_i - \vec{d}) = \sum_i q_i\vec{R}_i - \vec{d}\sum_i q_i = \vec{P}\,,$$

так как $\sum\limits_i q_i = 0$.

б) $\vec{P}\,' = 0$, если

$$\vec{d} = \frac{\sum\limits_i q_i\vec{R}_i}{\sum\limits_i q_i}\,.$$

Р.13. Найти потенциал $\varphi\,(\vec{R})$ поля двух концентрических колец радиусов a и b с зарядами q и $-q$ для: а) $R \gg a,\ b$; б) $R \ll a,\ b$.



Сначала вычислим потенциал от одного кольца на больших расстояниях. Заряженное кольцо радиуса R_0 расположим в плоскости $(x,\ y)$. Центр кольца 0 совпадает с началом координат. Ось X направим перпендикулярно плоскости, в которой лежат Z и $\vec{R}$.

$\vec{R}$ — радиус-вектор точки наблюдения. Потенциал, создаваемый зарядом элемента кольца $dl = R_0\,d\alpha$, в точке $(R,\,\theta)$ равен

$$d\varphi = \frac{q}{2\pi R_0}\,\frac{R_0\,d\alpha}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0\cos\theta_0}}\,.$$

Потенциал, создаваемый зарядом всего кольца:

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\alpha}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0\cos\theta_0}}\,. \tag{1}$$

Чтобы найти потенциал на расстояниях, больших по сравнению с радиусом кольца, разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора по малому параметру R_0/R до второго порядка включительно. Поскольку дипольный момент кольца равен нулю, что видно из симметрии расположения зарядов, то оставим в сумме три первых члена:

$$\frac{1}{\sqrt{R_0^2 + R^2 - 2RR_0\cos\theta_0}} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{R_0}{R})^2 - \frac{2R_0}{R}\cos\theta_0}} \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{R}\left(1 + \frac{R_0}{R}\cos\theta_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2(3\cos^2\theta_0 - 1) + \ldots\right).$$

Вычисляя теперь интеграл (1), получаем

$$\varphi = \frac{q}{R} + \frac{q}{4R}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2(1 - 3\cos^2\theta_0)\,.$$

При вычислении использована связь $\cos\theta_0 = \sin\theta\sin\alpha$. Значит, потенциал от двух концентрических колец радиусов a и b с зарядами q и $-q$ имеет вид

$$\varphi\,(R,\,\theta) = \frac{q}{4R^3}(a^2 - b^2)(1 - 3\cos^2\theta_0) \qquad \text{при} \qquad a,\,b \ll R.$$

Теперь найдем потенциал кольца радиуса R_0 при $R_0 \gg R$:

$$\varphi\,(R,\,\theta)=\frac{q}{R_0}+\frac{q}{2\pi R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,(3\sin^2\theta\,\sin^2\alpha-1)\,d\alpha=$$

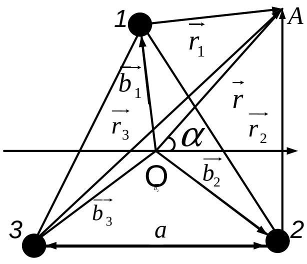
$$=\frac{q}{R_0}+\frac{q}{4R_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2(1-3\cos^2\theta_0).$$

Тогда потенциал двух колец при $a,\ b \gg R$ будет иметь вид

$$\varphi(R,\,\theta)=q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-\frac{qR^2}{4}\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}\right)(3\cos^2\theta-1)\ .$$

Р.14. Три бесконечные заряженные нити (линейная плотность заряда η) расположены на расстоянии a друг от друга. Найти два первых (отличных от нуля) члена разложения потенциала на больших расстояниях.

Напряженность электрического поля от бесконечной заряженной с плотностью η нити $\vec{E}=(2\eta/R^2)\vec{R}$, где $\vec{R}$ — радиус-вектор, расположенный в плоскости, перпендикулярной нити, и проведенный от нити в точку наблюдения. Тогда потенциал от одной нити равен $-2\eta\ln R+\mathrm{const}$. Потенциал от трех нитей в обозначениях рисунка



$$\varphi=-2\eta\ln r_1-2\eta\ln r_2-2\eta\ln r_3\,.$$

Константа выбрана равной нулю. Так как $\vec{r}_1=\vec{r}-\vec{b}_1$, то

$$r_1=(r^2+b^2-2rb\sin\alpha)^{1/2}.$$

Аналогично

$$r_2=\left(r^2+b^2-2rb\cos(\alpha+30^\circ)\right)^{1/2},$$

$$r_3=(r^2+b^2+2rb\cos(\alpha-30^\circ))^{1/2},$$

где $b = |\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = |\vec{b}_3|$. Далее,

$$\ln r_1 = \ln r + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2b}{r}\sin\alpha + \frac{b^2}{r^2}\right).$$

Разлагая второе слагаемое в ряд Тейлора по степеням b/r, получаем

$$\ln r_1 \simeq \ln r - \sin\alpha\,\frac{b}{r} + (1 - 2\sin^2\alpha)\,\frac{b^2}{r^2} + \frac{1}{3!}(12\sin\alpha - 16\sin^3\alpha)\,\frac{b^3}{r^3}.$$

Сделав аналогичные вычисления для $\ln r_2$ и $\ln r_3$ и сложив, окончательно найдем, что

$$\varphi = -6\eta\ln r - 2\,\frac{b^3}{r^3}\,\eta\,\sin^3\alpha \quad \text{при} \quad b << r,$$

где $b = a/\sqrt{3}$.

Р.15. По какому закону должна быть распределена плотность заряда $\rho\,(r)$ внутри цилиндра радиуса R, чтобы напряженность электрического поля E внутри цилиндра была постоянна по величине и равна E_0. Каково распределение потенциала?

Из $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ следует

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_0) = 4\pi\rho, \quad \text{откуда} \quad \rho = \frac{E_0}{4\pi r}.$$

Внутри цилиндра потенциал φ изменяется по закону $\varphi_1 = -E_0 r + C$, где C — константа. Вне цилиндра потенциал подчиняется уравнению Лапласа, которое для данного случая будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = 0.$$

Откуда

$$\varphi_2 = A\ln r + B,$$

где A, B — константы. Выбирая $\varphi_1(0) = 0$ и используя граничные условия

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R},$$

получаем

$$\varphi_1 = -E_0 r \qquad \text{при} \qquad r \leq R,$$

$$\varphi_2 = -E_0 R\left(\ln\frac{r}{R} + 1\right) \qquad \text{при} \qquad r > R.$$

Р.16. Бесконечный полый цилиндр радиуса R заряжен с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos 2\alpha$, где α — полярный угол цилиндрической системы координат с осью Z, направленной вдоль оси цилиндра. Найти потенциал φ и напряженность $\vec{E}$ электрического поля внутри и вне цилиндра.

Из симметрии распределения заряда потенциалы внутри φ_1 и вне цилиндра φ_2 могут зависеть только от r и α (в цилиндрической системе координат). Эти потенциалы равны друг другу на поверхности цилиндра и удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0. \tag{1}$$

Будем искать решение уравнения (1) для $r < R$ и $r > R$ в виде

$$\varphi = f(r)\,\psi(\alpha). \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) можно записать так

$$\frac{r}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) = -\frac{1}{\psi(\alpha)}\,\frac{\partial^2\psi(\alpha)}{\partial\alpha^2}.$$

Чтобы этому уравнению удовлетворить при любых r и α, нужно положить

$$-\frac{1}{\psi(\alpha)}\,\frac{\partial^2\psi(\alpha)}{\partial\alpha^2} = C^2; \tag{3}$$

$$\frac{r}{f(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right) = C^2\,, \tag{4}$$

где C — постоянная величина. Решением уравнения (3) является функция $\psi(\alpha) = \cos C\alpha$. Поскольку на поверхности цилиндра должно выполняться условие

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right|_{r=R} - \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=R} = 4\pi\sigma_0\cos 2\alpha\ , \tag{5}$$

то понятно, что $C = 2$. Уравнение (4) для радиальной части функции примет вид

$$r^2\,\frac{d^2f(r)}{dr^2} + r\,\frac{df(r)}{dr} - 4f(r) = 0. \tag{6}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде $f = ar^b$. Подставив его в уравнение (6), получим, что оно удовлетворяется при $b = \pm 2$.

Понятно, что в решение для области $r > R$ не должен входить член, пропорциональный r^2, поскольку потенциал не должен стремиться к бесконечности при $r \to \infty$ (из-за ограниченной величины заряда). Для области же $r < R$, наоборот, не должен входить член, пропорциональный r^{-2}, чтобы потенциал остался конечным при $r = 0$. Поэтому

$$\varphi_1 = A_1 r^2\cos 2\alpha \qquad \text{при} \qquad r \le R\ ,$$

$$\varphi_2 = A_2 r^{-2}\cos 2\alpha \qquad \text{при} \qquad r \ge R\ .$$

Подставляя решения в уравнение (5) и учитывая, что на поверхности цилиндра $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$, находим, что $A_1 = \pi\sigma_0/R$, $A_2 = \pi\sigma_0 R^3$. Для $r \le R$ окончательно получим

$$\varphi_1 = \pi\sigma_0 R\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos 2\alpha,$$

$$E_{r1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = -2\pi\sigma_0\frac{r}{R}\cos 2\alpha,$$

$$E_{\alpha 1} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} = 2\pi\sigma_0\frac{r}{R}\sin 2\alpha,$$

$$|\vec{E}| = 2\pi\sigma_0 \frac{r}{R};$$

для $r \geq R$ получим

$$\varphi_2 = \pi\sigma_0 R \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cos 2\alpha,$$

$$E_{r2} = 2\pi\sigma_0 \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos 2\alpha,$$

$$E_{\alpha 2} = 2\pi\sigma_0 \left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin 2\alpha,$$

$$|\vec{E}| = 2\pi\sigma_0 \left(\frac{R}{r}\right)^3.$$

Р.17. Найти силу, с которой диполь с моментом $\vec{P}$ действует на заряженную нить. Заряд нити на единицу длины η; диполь расположен перпендикулярно нити и линии, их соединяющей на расстоянии a. Найти вращательный момент, приложенный к диполю.

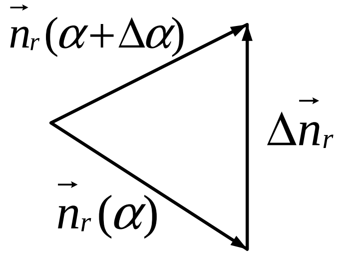
В цилиндрической системе координат $(r,\ \alpha,\ z)$ с осью Z вдоль нити дипольный момент имеет проекции $(0,\ P,\ 0)$. Поле заряженной нити $\vec{E} = 2\eta\vec{r}/r^2$. Сила, действующая на диполь в поле нити:

$$\vec{F}_p = (\vec{P}\vec{\nabla})\vec{E} = \frac{P}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{E} = \frac{P}{r}\frac{2\eta}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{n}_r = \frac{2\eta P}{r^2}\,\vec{n}_\alpha,$$

где $\vec{n}_r,\ \vec{n}_\alpha$ — единичные векторы в цилиндрической системе координат. Сила $\vec{F}$, с которой диполь действует на нить:

$$\vec{F} = -\vec{F}_p(a) = -\frac{2\eta P}{a^2}\,\vec{n}_\alpha.$$

Вычислим производную $\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{n}_r$, которую мы использовали выше:



$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec{n}_r = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\vec{n}_r(\alpha+\Delta\alpha)-\vec{n}_r(\alpha)}{\Delta\alpha} =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\vec{n}_r}{\Delta\alpha} = \vec{n}_\alpha .$$

Приведенный рисунок поясняет взятие производной.

Вращательный момент:

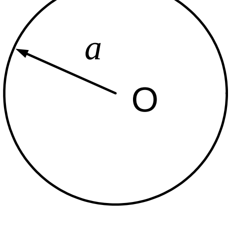
$$\vec{M} = [\vec{P}\times\vec{E}(a)] = \frac{2\eta}{a^2}[\vec{P}\times\vec{a}] = -\frac{2\eta P}{a}\vec{n}_z .$$

Р.18. Используя уравнение Пуассона, симметрию задачи, конечность и непрерывность потенциала и его производной, найти потенциалы:

а) шара радиуса a, равномерно заряженного по объему с объемной плотностью ρ;

б) цилиндра радиуса a, равномерно заряженного по объему с линейной плотностью η;

в) слоя толщиной $2a$, равномерно заряженного с объемной плотностью ρ.



а) Потенциал φ удовлетворяет уравнениям Пуассона $\Delta\varphi_1 = -4\pi\rho$ при $R \le a$ и Лапласа $\Delta\varphi_2 = 0$ при $R \ge a$. В сферической системе координат с учетом симметрии задачи эти уравнения будут иметь вид

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\right) = -4\pi\rho \qquad \text{при} \qquad R \le a\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right) = 0 \qquad \text{при} \qquad R > a\,.$$

Начало системы координат помещено в центр шара. Интегрируя уравнения, получаем

$$\varphi_1 = -\frac{2}{3}\pi\rho R^2 - \frac{A_1}{R} + B_1 \qquad \text{при} \qquad R \le a\,,$$

$$\varphi_2 = -\frac{A_2}{R} + B_2 \qquad \text{при} \qquad R > a,$$

где A_1, B_1, A_2, B_2 — константы интегрирования. Второе слагаемое в выражении для φ_1 содержит член $\sim 1/R$. Значит, напряженность электрического поля будет содержать член $\sim 1/R^2$, который при $R \longrightarrow 0$ стремится к бесконечности.

Поскольку заряд распределен с конечной объемной плотностью в ограниченной области, то напряженность электрического поля нигде не может быть бесконечной. Для удовлетворения этого условия необходимо, чтобы $A_1 = 0$. Выбирая потенциал равным нулю на бесконечности, положим $B_2 = 0$. Из уравнения $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ следует условие непрерывности касательных составляющих напряженности электрического поля на поверхности шара: $E_{1\tau}\big|_{R=a} = E_{2\tau}\big|_{R=a}$. Этому условию можно удовлетворить, если $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$.

Из уравнения $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ следует, что

$$E_{1n}\big|_{R=a} - E_{2n}\big|_{R=a} = 4\pi\sigma,$$

где E_{1n}, E_{2n} — нормальные составляющие вектора $\vec{E}$; σ — поверхностная плотность зарядов. Поскольку в задаче поверхностная плотность зарядов равна нулю, то нормальная составляющая вектора $\vec{E}$ на поверхности шара непрерывна. Поэтому

$$-\frac{2}{3}\pi\rho a^2 + B_1 = \frac{A_2}{a}\,,$$

$$-\frac{4}{3}\pi\rho a = \frac{A_2}{a}\,,$$

откуда

$$A_2 = -\frac{4}{3}\pi\rho a^3\,, \quad B_1 = 2\pi\rho a^2\,.$$

Окончательно распределение потенциала выразится так:

$$\varphi_1 = -\frac{2}{3}\pi\rho(3a^2 - R^2) \qquad \text{при} \qquad R \le a\,,$$

$$\varphi_2 = -\frac{4\pi a^3\rho}{3R} \qquad \text{при} \qquad R > a\,.$$

б) Уравнения Пуассона и Лапласа в цилиндрической системе координат с осью Z вдоль оси цилиндра будут иметь вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right) = -4\pi\rho \qquad \text{при} \qquad r \le a\,,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right) = 0 \qquad \text{при} \qquad r > a\,,$$

поскольку из симметрии задачи потенциал может зависеть только от расстояния до точки наблюдения. Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\varphi_1 = -\pi\rho r^2 + A_1 \ln r + B_1,$$

$$\varphi_2 = A_2 \ln r + B_2.$$

Чтобы потенциал был конечным при $r = 0$, нужно положить $A_1 = 0$, иначе напряженность электрического поля на оси цилиндра будет бесконечной. Удобно выбрать потенциал равным нулю на оси цилиндра, тогда $B_1 = 0$. Из условия непрерывности потенциала и его производной при $r = a$ находим

$$A_2 = -2\pi\rho a^2,$$

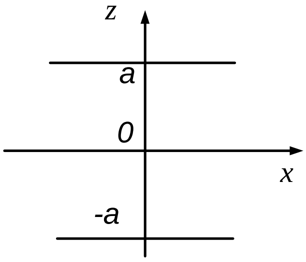
$$B_2 = 2\pi\rho a^2 \ln a - \pi\rho a^2.$$

Выражая объемную плотность заряда ρ через заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра $\rho = \eta/\pi a^2$, окончательно получаем

$$\varphi_1 = -\pi\rho r^2 = -\frac{\eta r^2}{a^2} \qquad \text{при} \qquad r \le a\,,$$

$$\varphi_2 = 2\eta \ln\frac{a}{r} - \eta \qquad \text{при} \qquad r \ge a\,.$$

в) Декартову систему координат выберем таким образом, чтобы



оси X и Y лежали в средней плоскости пластины. Потенциал может зависеть только от координаты z, поскольку все точки плоскости $z = \mathrm{const}$ равноправны. Уравнения Пуассона и Лапласа для различных областей принимают вид

$$\frac{d^2\varphi_1(z)}{dz^2} = 0 \text{ при } z \le a,$$
$$\frac{d^2\varphi_2(z)}{dz^2} = -4\pi\rho \text{ при } -a < z < a\ , \qquad (1)$$
$$\frac{d^2\varphi_3(z)}{dz^2} = 0 \text{ при } z > a.$$

Решения этих уравнений запишутся следующим образом:

$$\varphi_1 = A_z + B_1\,,$$
$$\varphi_2 = -2\pi\rho z^2 + A_2 z + B_2\,,$$
$$\varphi_3 = A_3 + B_3\,.$$

Выберем потенциал так, чтобы он равнялся нулю при $z = 0$, тогда $B_2 = 0$. Напряженность электрического поля – векторная величина, и, в силу симметрии системы зарядов относительно средней плоскости, напряженность в этой плоскости равна нулю, поскольку направления в сторону положительных и отрицательных z равноправны. Это означает, что

$$\left.\frac{d\varphi_2}{dz}\right|_{z=0} = 0,$$

откуда $A_2 = 0$. Далее, так же как в приведенных выше задачах, воспользуемся непрерывностью потенциала и его производной при $z = \pm a$. Это дает

$$A_1 = 4\pi\rho a\ , \quad B_1 = 2\pi\rho a^2\,,$$
$$A_3 = -4\pi\rho a\ , \quad B_3 = 2\pi\rho a^2\,.$$

Подставляя константы интегрирования в решение, получаем

$$\varphi_1 = 2\pi\rho a^2\left(1 + \frac{2z}{a}\right) \qquad \text{при} \qquad z \le -a\,,$$

$$\varphi_2 = 2\pi\rho z^2 \qquad \text{при} \qquad -a \le z \le a\,,$$

$$\varphi_3 = 2\pi\rho a^2\left(1 - \frac{2z}{a}\right) \qquad \text{при} \qquad z \ge a\,,$$

что можно записать короче следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} -2\pi\rho z^2 & \text{при } -a \le z \le a\,, \\ 2\pi\rho a^2\left(1 - \dfrac{2|z|}{a}\right) & \text{при } |z| \ge a\,. \end{cases}$$

Р.19. Плоскость $z = 0$ заряжена с плотностью $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin\alpha x \sin\beta y$, где σ_0, α, β — постоянные. Найти потенциал этой системы зарядов.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\,. \tag{1}$$

На заряженной плоскости нормальная составляющая электрического поля терпит разрыв

$$E_{2z}\Big|_{z=0} - E_{1z}\Big|_{z=0} = 4\pi\sigma\,. \tag{2}$$

Поскольку поверхностная плотность σ есть произведение двух функций, одна из которых зависит только от координаты x, а другая от y, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$\varphi(x, y, z) = f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot f_3(z)\,. \tag{3}$$

Подставим функцию (3) в уравнение (1) и поделим каждое слагаемое на φ, получим

$$\frac{\partial^2(f_3(z))/\partial z^2}{f_3(z)} = -\left(\frac{\partial^2(f_1(x))/\partial x^2}{f_1(x)} + \frac{\partial^2(f_2(y))/\partial y^2}{f_2(y)}\right). \tag{4}$$

Чтобы уравнение (4) удовлетворялось при всех x, y, z, нужно приравнять каждое слагаемое константе. Пусть

$$\frac{\partial^2(f_3(z))/\partial z^2}{f_3(z)} = -\gamma^2\,.$$

Общим решением этого уравнения является функция

$$f_3(z) = A\,e^{-\gamma z} + B\,e^{\gamma z}.$$

Понятно, что при стремлении $z \to \pm\infty$, $f_3(z)$ не должна стремиться к бесконечности, поскольку поле создается знакопеременными зарядами. Этому условию можно удовлетворить, если записать решение, например, так:

$$f_3(z) = A\,e^{-\gamma|z|}.$$

Пусть

$$\frac{\partial^2(f_1(x))/\partial x^2}{f_1(x)} = -\gamma_1^2\,, \quad \frac{\partial^2(f_2(y))/\partial y^2}{f_2(y)} = -\gamma_1^2\,, \quad \gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2\,.$$

Решениями этих уравнений являются гармонические функции. Ясно, что, чтобы удовлетворить гармоническому условию (2), нужно выбрать

$$f_1(x) = \sin\alpha x\,, \quad \alpha^2 = \gamma_1^2\,; \quad f_2(y) = \sin\beta y\,, \quad \gamma_2^2 = \beta^2;$$

значит, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Итак,

$$\varphi = A\,e^{-\gamma|z|}\sin\alpha x\,\sin\beta y\,.$$

Нормальная составляющая электрического поля $E_z = -\partial\varphi/\partial z$. Поэтому

$$E_{2z}\Big|_{z=0} = \gamma A\sin\alpha x\,\sin\beta y\,,$$

$$E_{1z}\Big|_{z=0} = -\gamma A\sin\alpha x\,\sin\beta y\,.$$

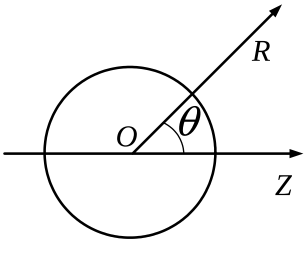
Подставляя эти выражения в уравнение (2), найдем, что $A = 2\sigma_0/\gamma$. Окончательно распределение потенциала будет иметь вид

$$\varphi(x\,,\; y\,,\; z) = \frac{2\sigma_0}{\gamma}\, e^{-\gamma|z|} \sin\alpha x\, \sin\beta y\,,$$

где $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Р.20. Незаряженный металлический шар радиуса a вносится в электрическое поле, которое при отсутствии шара было однородным и равным $\vec{E}_0$. Определить результирующее поле и плотность поверхностных зарядов на шаре. Найти полный заряд, индуцированный на одной половине поверхности шара.

Начало сферической системы координат поместим в центр шара. Ось Z, относительно которой отсчитываются угол θ, направим вдоль поля $\vec{E}_0$. Поскольку шар металлический, то напряженность поля внутри шара равна нулю. Вне шара поле описывается уравнением Лапласа. Так как система имеет аксиальную симметрию, то напряженность поля и потенциал будут зависеть только от двух сферических координат R и θ. Уравнение Лапласа для рассматриваемой задачи примет вид



$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi(R,\,\theta)}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi(R,\,\theta)}{\partial\theta}\right) = 0\,. \qquad (1)$$

Решение уравнения будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от R, другая — только от θ:

$$\varphi(R\,,\;\theta) = \varphi_1(R)\,\varphi_2(\theta)\,.$$

Чтобы определить функции $\varphi_1(R)$ и $\varphi_2(\theta)$, подставим решение в дифференциальное уравнение (1). После преобразований получим

$$\frac{1}{\varphi_1(R)}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi_1(R}{\partial R}\right) = -\frac{1}{\varphi_2(\theta)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\varphi_2(\theta)}{\partial\theta}\right).$$

Это равенство должно быть справедливо при любых значениях R и θ, что возможно лишь в случае, когда и левая, и правая части уравнения равны некоторой постоянной С, т. е.

$$\frac{1}{\varphi_1(R)}\frac{d}{d\,R}\left(R^2\frac{d\,\varphi_1(R)}{d\,R}\right)=C\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\varphi_2(\theta)\sin\theta}\frac{d}{d\,\theta}\left(\sin\theta\;\frac{d\,\varphi_2(\theta)}{d\,\theta}\right)=-C\,. \tag{3}$$

Решением уравнения (3) является функция $\varphi_2(\theta)=\cos\theta$ при $C=\;2$, что легко проверить. Решение уравнения (2) будем искать в виде степени R:

$$\varphi_1(R)=A\,R^n\,.$$

Подставим эту функцию в уравнение (2) и для n получим уравнение $n^2+n-2=0$, корни которого равны $n_1=-2\,,\;n_2=1.$

Таким образом, искомый потенциал имеет вид

$$\varphi(R\,,\;\theta)=\left(A_1R+\frac{A_2}{R^2}\right)\cos\theta\,.$$

Для определения постоянных A_1 и A_2 учтем граничные условия. Понятно, что при $R\longrightarrow\infty$ влияние шара не должно сказываться, т. е. $\lim\limits_{R\to\infty}E_z(R,\theta)=E_0$, где

$$E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Учитывая, что $z=R\cos\theta$, находим $A_1=-E_0$. Поверхность шара является эквипотенциальной. Поэтому при $R=a,\;\varphi(a,\;\theta)=0$ для всех значений θ, что возможно при условии

$$A_1a+\frac{A_2}{a^2}=0\,.$$

Следовательно, $A_2=E_0a^3$ и потенциал можно представить в виде

$$\varphi=-E_0z+\frac{a^3(\vec{E}_0\vec{R})}{R^3}=-E_0R\cos\theta+\frac{E_0a^3\cos\theta}{R^2}\;\text{при}\;R\geq a.$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{при} \qquad R \le a.$$

Таким образом, металлический незаряженный шар, внесенный в однородное электрическое поле, меняет картину этого поля так, как изменил бы ее внесенный в поле электрический диполь с моментом $\vec{d} = \vec{E}_0 a^3$. Найдем напряженность электрического поля $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Использовав оператор $\vec{\nabla}$, запишем

$$\vec{E} = -(\vec{\nabla}\varphi) = \vec{E}_0 - \frac{a^3}{R^3}\vec{\nabla}(\vec{E}_0\vec{R}) - a^3(\vec{E}_0\vec{R})\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R^3}\right).$$

С помощью правил векторного анализа вычислим $\vec{\nabla}(\vec{E}_0\vec{R})$:

$$\vec{\nabla}(\vec{E}_0\vec{R}) = \left[\vec{E}_0 \times [\vec{\nabla} \times \vec{R}]\right] + \left[\vec{R} \times [\vec{\nabla} \times \vec{E}_0]\right] + (\vec{E}_0\vec{\nabla})\vec{R} + (\vec{R}\vec{\nabla})\vec{E}_0.$$

Поскольку $\vec{E}_0 = \mathrm{const}$ и $[\vec{\nabla} \times \vec{R}] = \mathrm{rot}\vec{R} = 0$, получим

$$\vec{\nabla}(\vec{E}_0\vec{R}) = (\vec{E}_0\vec{\nabla})\vec{R} = \vec{E}_0.$$

Достаточно элементарно можно показать, что

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{R^3}\right) = \frac{3\vec{R}}{R^5}.$$

Окончательно для вектора напряженности электрического поля получаем выражение

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_0 + \dfrac{3(\vec{d}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \dfrac{\vec{d}}{R^3} & \text{при} \quad R > a, \\ 0 & \text{при} \quad R < a, \end{cases}$$

где $\vec{d} = \vec{E}_0 a^3$ — дипольный момент, приобретаемый шаром в однородном электрическом поле $\vec{E}_0$.

Поверхностная плотность индуцированных зарядов

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{4\pi}E_R\bigg|_{R=a} = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta.$$

Этот заряд создает внутри шара однородное поле $\vec{E} = -\vec{E}_0$, поскольку полное поле равняется нулю. Величина заряда на одной половине шара будет равна

$$|Q| = \left|\int\limits_S \sigma\, ds\right| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{3}{4\pi} E_0 \cos\theta \cdot 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{4} E_0 a^2 \,.$$

Разумеется, полный заряд на шаре равен нулю.

2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА В СРЕДЕ

Уравнения Максвела в однородной среде с диэлектрической проницаемостью в дифференциальной форме имеют вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho\,,\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \tag{1}$$

где $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E}$. Вектор поляризации $\vec{P}$ — дипольный момент единицы объема, $\vec{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\vec{E}$.
Интегральная форма уравнений Максвелла

$$\iint\limits_S D_n dS = 4\pi q\,,\quad \oint E_l\, dl = 0\,, \tag{2}$$

откуда получаются граничные условия

$$D_{1n}| - D_{2n}| = 4\pi\sigma\,, \text{или } \varepsilon_1 E_{1n}| - \varepsilon_2 E_{2n}| = 4\pi\sigma\ ,\ E_{1\tau}| = E_{2\tau}|\,. \tag{3}$$

Поле точечного заряда (закон Кулона) в среде

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{4}$$

Потенциал точечного заряда

$$\varphi_{\text{точ}} = -\int E_l\, dl = \frac{q}{\varepsilon r} + C\,. \tag{5}$$

Часто константу C выбирают равной 0.

Энергия для совокупности зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} q_i\varphi_k = \frac{1}{2}\left(\int \rho\varphi\, dV + \int \sigma\varphi\, dS + \int \varkappa\varphi\, dl\right) = \\ = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2 dV. \quad (6)$$

Уравнение для потенциала с источниками (зарядами) — уравнение Пуассона, и уравнение без источников — уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\,,\ \Delta\varphi = 0\,. \quad (7)$$

Граничные условия на границе раздела сред 1—2 (n — нормаль из среды 1 в 2):

$$\varphi_1| = \varphi_2|\,,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}| - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}| = 4\pi\sigma\,. \quad (8)$$

Решение уравнения Пуассон для точечного заряда

$$\Delta\varphi_{\text{точ}} = -4\pi\delta(\vec{r})\,,\ \varphi_{\text{точ}} = \frac{q}{r} + C\,. \quad (9)$$

Общее решение уравнения Пуассона для распределенной системы зарядов

$$\varphi(\vec{r}) = \int\limits_V \frac{\rho(\vec{r'})\, dV'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \int\limits_S \frac{\sigma(\vec{r'})\, dS'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + \int\limits_L \frac{\varkappa(\vec{r'})\, dl'}{|\vec{r}-\vec{r'}|}. \quad (10)$$

При $r >> a$, где a — характерный размер системы зарядов, потенциал произвольной системы зарядов

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\Sigma Q_{\mu\nu}\left(\frac{3x_\mu x_\nu}{r^5} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{r^3}\right) + \dots\,, \quad (11)$$

где $q = \Sigma q_k$, $\vec{p} = \Sigma q_k \vec{r}_k$, $Q_{\mu\nu} = \Sigma\left(q_k x'^k_\mu x'^k_\nu - \frac{1}{3} r'^2_k \delta_{\mu\nu}\right)$, x'^k – координаты заряда q_k , а $r'^2_k = \Sigma(x'^k)^2$.
Сила $\vec{F} = q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}W$.
Энергия диполя $W = -(\vec{p}\vec{E})$, момент силы $\vec{N} = [\vec{p} \times \vec{E}]$.
В неоднородном поле $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$.

2.1. Граничные условия

2.1. Вывести граничные условия для электрического поля и индукции, если плотность свободных зарядов на границе равна σ.

2.2. Найти скачок нормальной составляюшей $\vec{E}$ на границе двух сред с диэлектрическими проницаемостями ε_1, ε_2, а также плотности связанных зарядов по обе стороны границы.

2.3. Найти силу, действующую на малый заряд q, помещенный в бесконечную узкую щель в диэлектрике с проницаемостью ε, если диэлектрик находится во внешнем электрическом поле $\vec{E}$ так, что ось щели образует угол α с направлением внешнего поля.

2.4. Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти напряженность и индукцию электрического поля, а также его потенциал.

2.5. Центр проводящего шара радиуса R (заряд q) находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал электрического поля, а также распределение свободных и связанных зарядов на поверхности шара.

2.6. От прямой, на которой находится точечный заряд q, расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью соответственно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ Определить потенциал, напряженность и индукцию

электрического поля в трех областях.

2.7. Вдоль плоской границы раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 лежит заряженная нить. Её заряд на единицу длины $\varkappa$. Найти $\vec{E}_{1,2}$ и $\vec{D}_{1,2}$ внутри диэлектриков.

2.8 а. Однородный шар радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε_1 погружен в однородный неограниченный диэлектрик ε_2. На большом расстоянии от шара в диэлектрике имеется однородное электрическое поле $\vec{E}_0$. Найти потенциал и напряженность электрического поля во всем пространстве, а также распределение связанных зарядов на шаре и его поляризованность.

2.8 б. В однородное электрическое поле $\vec{E}_0$ внесен шар с диэлектрической проницаемостью ε. В шаре имеется маленькая сферическая полость, находящаяся далеко от поверхности шара. Найти поле в полости.

2.2. Емкость

2.9. Оцените свою электрическую емкость в пикофарадах.

2.10. Оценить емкость: а) металлической пластинки с размерами $h \ll a \ll \ell$ и б) цилиндра с $a \ll \ell$.

2.11. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon = \varepsilon_0(x + a)/a$, где a — расстояние между обкладками, ось X направлена перпендикулярно обкладкам, площадь которых S. Пренебрегая краевыми эффектами, найти емкость такого конденсатора и распределение в нем связанных зарядов, если к обкладкам приложена разность потенциалов U.

2.12. Внутрь разомкнутого конденсатора мгновенно вставляют электрет-брусок, состоящий из частиц с дипольными моментами $\vec{d}_0$, ориентированными одинаково и ортогонально пластинам конденсатора, расстояние между которыми h. Число частиц в единице объема n_0. Размеры электрета совпадают с размерами конденсатора. Найти на-

пряжение на пластинах конденсатора.

2.13. Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b диэлектрическая проницаемость меняется по закону

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \text{const} & \text{при } a \le r < c \\ \varepsilon_2 = \text{const} & \text{при } c \le r \le b \end{cases},$$

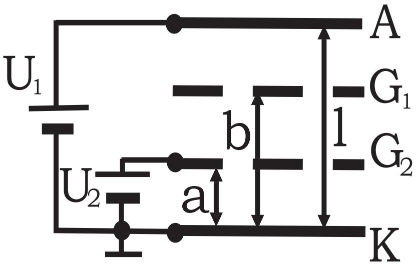
где $a < c < b$. Найти емкость конденсатора, распределение зарядов $\sigma_{\text{связ}}$ и полный связанный заряд в диэлектрике.

2.14. Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесного угла Ω с вершиной в центре обкладок. Радиусы обкладок — a и b, проницаемость диэлектрика — ε. Найти емкость конденсатора.

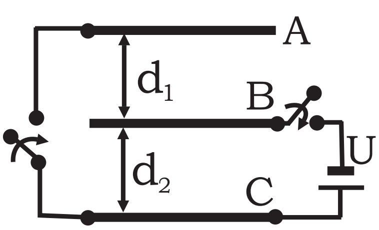
2.15. Найти взаимную емкость двух шаров радиуса a, если расстояние между их центрами равно $b \gg 2a$.

2.16. Найти погонную емкость двухпроводной линии (радиус провода a, расстояние между центрами проводов $b \gg a$).

2.17. В четырехэлектродной лампе с плоскими параллельными электродами заданы одинаковая площадь электродов S и расстояния от катода K до анода A — ℓ, сетки G_2 — a и дальней сетки G_1 — b. Анодное напряжение U_1, а между сеткой G_2 и катодом напряжение U_2. Найти заряд на сетке G_1, если ток через лампу прекратился.

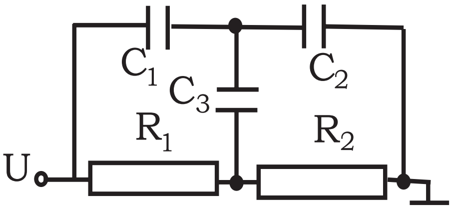


2.18. Три одинаковые проводящие пластины A, B и C расположены параллельно друг другу на расстояниях d_1 и d_2. Вначале на пластине A находится заряд q, а пластины B и C не заряжены. Затем к пластинам B и C присоединяется батарея с эдс, равной U, а пластины A и C соединяются проводником. Найти установившиеся заряды на пластинах. Площадь пла-



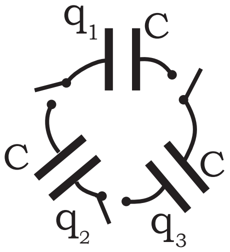
стины равна S.

2.19. Внутри плоского конденсатора, заряженного до напряжения U, на расстоянии h от одной из пластин находится маленький металлический шарик радиуса r. Пренебрегая искажением поля конденсатора, найти заряд, появившийся на шарике, если соединить шарик с пластиной с нулевым потенциалом. Расстояние между пластинами d.



2.20. Найти установившийся заряд на заземленной пластине конденсатора.

2.21. Трем одинаковым изолированным конденсаторам емкостью C были сообщены заряды q_1, q_2, q_3 соответственно. Потом конденсаторы соединили. Найти величины зарядов, оставшихся на конденсаторах.



2.3. Метод изображений

2.22. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии a от плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциал, напряженность электрического поля, распределение σ и полный индуцированный на металле заряд, а также силу, действующую на заряд.

2.23. Над бесконечной металлической незаряженной плоскостью протянута параллельно плоскости заряженная нить. Заряд единицы длины нити — $\varkappa$. Найти силу взаимодействия с пластиной и распределение наведенного заряда в плоскости.

2.24. Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен α. Внутри угла находится точечный заряд q. Найти электрическое поле в случаях: а) $\alpha = 90^o$; б) $\alpha = 60^o$; в) $\alpha = 45^o$.

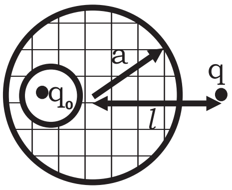
2.25. Над пространством, заполненным металлом, расположен круговой виток радиуса a, равномерно заряженный зарядом Q. Расстояние между параллельными плоскостями витка и границей металла h.

Найти напряженность поля и потенциал в центре витка.

2.26. Заряд q находится между двумя параллельными бесконечными проводящими плоскостями на расстоянии a от середины расстояния между ними. Оценить силу, действующую на заряд при $a \ll d$ (d — расстояние между плоскостями).

2.27. Заряд q находится внутри (вне) заземленной (изолированной) проводящей сферы радиуса a на расстоянии ℓ, от ее центра. Найти распределение потенциала во всем пространстве, распределение и полный индуцированный заряд на сфере.

2.28. Заряд q находится на расстоянии ℓ от проводящей изолированной сферы радиуса $a < \ell$ с зарядом Q. Найти силу взаимодействия заряда со сферой. При каком значении заряда на сфере эта сила обращается в ноль?



2.29. В металлическом изолированном шаре радиуса a имеется сферическая полость, в центре которой закреплен заряд q_0. Вне шара на расстоянии ℓ от его центра расположен второй заряд q. Найти силу действующую на заряд q.

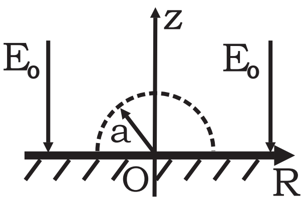
2.30. Электрический диполь находится на расстоянии ℓ от центра заземленной проводящей сферы радиуса a. Его дипольный момент $\vec{P}_0$ направлен перпендикулярно линии, соединяющей диполь и центр сферы радиуса $a < \ell$. Найти: а) потенциал системы; б) распределение зарядов на сфере, если диполь находится в ее центре.

2.31. Внутри пространства, заполненного металлом, имеется сферическая полость радиуса ℓ. В полости на расстоянии h от ее центра находится заряженное с линейной плотностью $\varkappa$ кольцо радиуса ℓ. Найти потенциал и напряженность поля в центре кольца.

2.32. Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса a. Центр полусферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы на расстоянии $b > a$ от плоскости находится точечный заряд q. Найти потенциал электрического поля, а также заряд

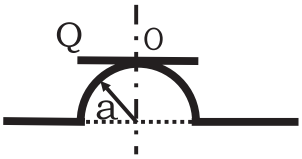
Q, индуцированный на выступе.

2.33. Над полупространством, заполненным металлом, имелось



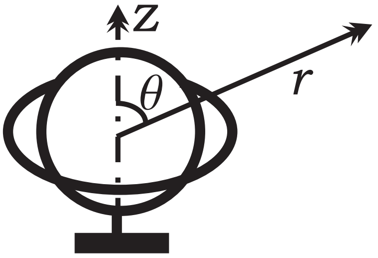
однородное электрическое поле $\vec{E}_0$, перпендикулярное поверхности металла. На поверхности образовалось полусферическое вздутие радиуса a. Найти распределение плотности заряда $\sigma(\theta)$ на нем и $\sigma(R)$ на оставшейся плоской поверхности металла, а также силу F, действующую на вздутие за счет электрического поля.

2.34. В полупространстве, занятом металлом, имеется полусфе-



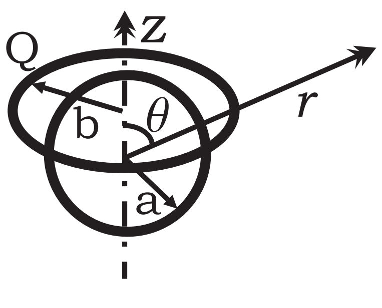
рический выступ радиуса a. Параллельно плоскости металла над выступом висит равномерно заряженное зарядом Q кольцо радиуса a, так что центр кольца совпадает с высшей точкой O выступа. Найти плотность электрического заряда в точке O выступа.

2.35. В экваториальной плоскости заземленной сферы радиуса a



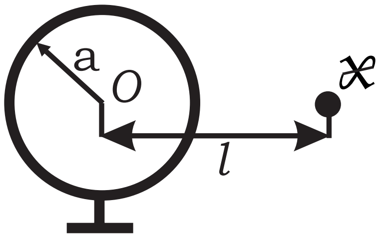
находится равномерно заряженное зарядом Q кольцо радиуса $b > a$. Центры сферы и кольца совпадают. Найти: а) потенциал $\varphi(z)$ на оси симметрии системы на расстоянии z от центра кольца; б) два первых ненулевых члена разложения потенциала $\varphi(r, \theta)$ на больших расстояниях $r \gg b$.

2.36. Равномерно заряженное с зарядом Q кольцо радиуса b рас-



положено вне изолированной металлической сферы радиуса a так, что плоскость кольца соприкасается со сферой, а его ось проходит через центр сферы (см. рисунок). Найти: а) потенциал $\varphi(z)$ на оси симметрии системы на расстоянии z от центра кольца; б) два первых ненулевых члена разложения потенциала $\varphi(r, \theta)$ на больших расстояниях $r \gg a, b$.

2.37. Около бесконечного заземленного металлического цилиндра



радиуса a параллельно оси цилиндра находится на расстоянии ℓ от оси бесконечная равномерно заряженная с линейной плотностью $\varkappa$ нить. Найти силу, действующую на единицу длины нити.

2.38. Над проводящим полупространством висит равномерно заряженная сфера радиуса a. Заряд q на сфере закреплен. Расстояние между её центром и плоской границей проводника h. Найти распределение плотности заряда $\sigma(R)$ на границе.

2.39. Точечный заряд q находится на расстоянии a от плоской границы раздела двух бесконечно протяженных однородных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 (заряд находится в диэлектрике с ε_1). Найти потенциал электрического поля.

2.40. Найти плотность $\sigma_{\text{связ}}$ связанных поверхностных зарядов, наведенных на плоской границе раздела двух однородных диэлектриков ε_1 и ε_2, точечным зарядом q, находящийся на расстоянии a над этой границей (заряд в диэлектрике с ε_1). Какой результат получится при $\varepsilon_2 \to \infty$, каков его физический смысл?

2.41. Электрический диполь висит на высоте h над плоской границей раздела двух сред о диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Его дипольный момент $\vec{p}$ параллелен поверхности раздела. Найти:
а) силу, действующую на диполь; б) момент силы.

2.42. Полупространства заполнены диэлектриками с различающимися значениями проницаемостей: ε_1 и ε_2. Бесконечная прямая нить, заряженная с линейной плотностью $\varkappa$, расположена перпендикулярно плоскости раздела диэлектриков. Найти силу, действующую на единицу длины нити на высоте h над плоскостью раздела диэлектриков.

2.43. Полупространства заполнены диэлектриком: верхнее с проницаемостью ε_1, нижнее — ε_2. На оси, перпендикулярной плоскости раздела, расположены три заряда: q_1, q_2 и q_3. В начале координат расположен заряд q_2, а q_1 и q_3 — симметрично на расстоянии a от заряда

q_2. Найти силу, действующую на заряд q_1.

2.44. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2 заполняют все пространство, соприкасаясь вдоль бесконечной плоскости. Два заряда q_1 и q_2 находятся на прямой, перпендикулярной этой плоскости на равных расстояниях a по разные стороны от нее. Найти силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие на каждый из зарядов. Чем объясняется неравенство этих сил?

2.4. Энергия поля. Давление. Силы

2.45. Равномерно заряженный лист в форме прямоугольного равнобедренного треугольника сложили пополам вокруг высоты, опущенной из вершины прямого угла, при этом была совершена работа A против сил электрического поля. Какую работу нужно совершить, чтобы еще раз таким же образом сложить полученный треугольник?

2.46. Какую работу следует совершить, чтобы совместить четыре одинаково заряженных тонких пластины, если известно, что при сложении двух таких пластин совершается работа A? Первоначально пластины разнесены на большое расстояние. Размеры и форма пластин одинаковы. Заряд распределен по пластине равномерно.

2.47. Внутри плоского конденсатора с площадью пластин S и расстоянием d между ними находится пластинка из стекла, целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла — ε. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластинку? Решить задачу при двух условиях: а) конденсатор все время присоединен к батарее с эдс $\mathcal{E}$; б) конденсатор был сначала подсоединен к той же батарее, а затем отключен и только после этого пластинка была удалена. Найти механическую работу, которая затрачивается на удаление пластинки в том и другом случае.

2.48. Найти энергию электростатического поля заряженного рав-

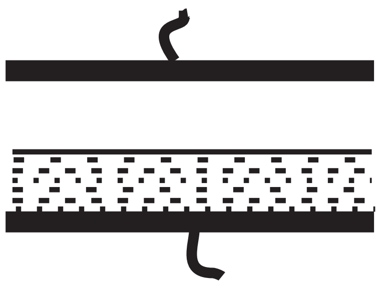
номерно по объему шара через плотность энергии и через плотность заряда и потенциал. Заряд шара Q, радиус R.

2.49. В некотором приближении можно считать, что электронные облака обоих электронов в атоме гелия имеют одинаковый вид и характеризуются объемной плотностью $\rho = \left(-8e/\pi a^3\right) \exp\left(-4r/a\right)$, где a — боровский радиус атома, e — элементарный заряд. Найти энергию взаимодействия электронов в атоме гелия в этом приближении.

2.50. Диполь с моментом $\vec{p}_1$ находится в начале координат, а другой диполь с моментом $\vec{p}_2$ — в точке с радиус-вектором $\vec{r}$. Найти энергию взаимодействия этих диполей и действующую между ними силу. При какой ориентации диполей эта сила максимальна?

2.51. Электрический диполь с моментом $\vec{p}$ находится в однородном диэлектрике вблизи плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциальную энергию взаимодействия диполя с индуцированными зарядами, силу и вращательный момент, приложенные к диполю. Расстояние a, проницаемость диэлектрика ε.

2.52. Электрический диполь $\vec{p}_0$ находится в однородном диэлектрике на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса R. Найти энергию взаимодействия диполя с шаром, силу и вращательный момент, приложенные к диполю. Рассмотреть случай $r \to R$ $(r > R)$.

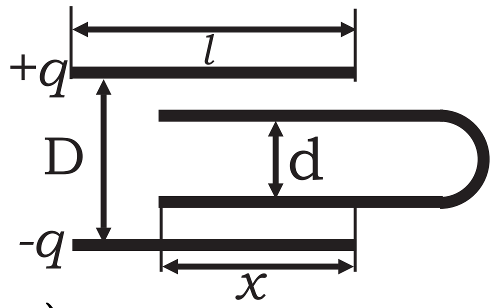


2.53. Конденсатор с квадратными пластинами $\ell \times \ell$ заряжен до величины q. В него налита жидкость с диэлектрической проницаемостью ε. Найти силу, действующую на каждую из пластин. Краевыми эффектами пренебречь.

2.54. Плоский конденсатор (подключен к батарее, эдс $\mathcal{E}$) с вертикально расположенными пластинами опущен в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Плотность жидкости ρ, расстояние между пластинами d. На какую высоту поднимется жидкость

внутри конденсатора?

2.55. В плоский заряженный до заряда q конденсатор медленно втягивается незаряженный короткозамкнутый конденсатор так, что все плоскости компланарны. Все размеры заданы (поперечные размеры конденсаторов совпадают). Найти силу втягивания $F(x)$, где x — размер втягивания, и распределение заряда (качественно) на пластинах короткозамкнутого конденсатора. Краевыми эффектами пренебречь, указав в то же время на их роль в этой задаче.



2.56. Проводящая сфера радиуса R, массы m плавает в диэлектрике ε, плотностью ρ, так что центр ее расположен на расстоянии a от уровня. Какой заряд нужно сообщить сфере, чтобы она погрузилась наполовину?

2.57. Равномерно заряженная сфера с зарядом q разрезана пополам. Каким должен быть заряд, помещенный в центр сферы, чтобы полусферы не расходились?

2.58. Заряженный зарядом Q проводящий шар радиуса a разрезан пополам. С какой силой половинки расталкиваются?

2.59. Незаряженный проводящий шар радиуса a, помещен в однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}$. Шар разрезан пополам, плоскость разреза перпендикулярна вектору $\vec{E}$. Найти силу, действующую на одно полушарие.

2.60. Найти сечение захвата электронов (заряд — e, масса — m, скорость на бесконечности — v) абсолютно проводящей нейтральной закрепленной сферой радиуса R.

2.61. Найти сечение рассеяния на малые углы электронов (заряд — e, масса — m, скорость на бесконечности — v), пролетающих с большим прицельным параметром ρ мимо шара радиуса a, если: а) шар проводящий и заземлен; б) шар проводящий и изолирован; в) шар диэлектрический с проницаемостью ε; г) шар диэлектрический с поля-

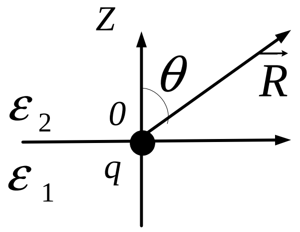
ризуемостью $\backsim E^2$.

2.62. Покажите, что электрическое поле делит пополам угол между нормалью к плоской границе среды и силой, действующей на эту границу.

2.5. Решение типичных задач

Р.21. Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти напряженность, индукцию и потенциал электрического поля.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и из симметрии задачи может зависеть только от R и угла θ (см. рисунок). Кроме



того, на границе раздела диэлектриков ($z = 0$) должны удовлетворяться граничные условия: 1) непрерывность касательной составляющей напряженности электрического поля $E_{1\tau}|_{z=0} = E_{2\tau}|_{z=0}$ или потенциала электрического поля $\varphi_1|_{z=0} = \varphi_2|_{z=0}$; 2) непрерывность нормальной составляющей вектора электрической индукции $D_{1n}|_{z=0} = D_{2n}|_{z=0}$, поскольку $\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$, где ρ — плотность свободных зарядов в диэлектрике.

Попробуем найти решение в виде потенциала от точечного заряда в вакууме, умноженного на константу:

$$\varphi_1 = a_1\frac{q}{R} \qquad \text{при} \qquad z \leq 0,$$

$$\varphi_2 = a_2\frac{q}{R} \qquad \text{при} \qquad z \geq 0.$$

Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Из непрерывности потенциала при $z = 0$ следует равенство констант $a_1 = a_2 = a$, значит, $\varphi = aq/R$. Равенство касательных составляющих электри-

ческого поля удовлетворяется автоматически, поскольку

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\,\varphi = aq\vec{R}/R^3.$$

Кроме того, на границе раздела, вообще, нормальная составляющая $E_n = 0$, так как вектор $\vec{R}$ лежит в плоскости раздела при $z = 0$. Отсюда следует, что выполняется второе условие: $D_{1n}|_{z=0} = D_{2n}|_{z=0} = 0$, так как

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E} = \varepsilon_1 aq\frac{\vec{R}}{R^3}\,, \quad \vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E} = \varepsilon_2 aq\frac{\vec{R}}{R^3}\,.$$

Чтобы найти коэффициент a, вычислим поток вектора $\vec{D}$ через сферу радиуса R с центром в заряде:

$$\Phi = D_1 2\pi R^2 + D_2 2\pi R^2\,.$$

С другой стороны, по теореме Гаусса $\Phi = 4\pi q$. Приравнивая эти два выражения, получаем $a = 2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Итак,

$$\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q}{R}\,, \qquad \vec{E} = \frac{2q}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{\vec{R}}{R^3}\,,$$

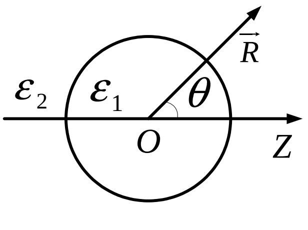
$$\vec{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q\vec{R}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad z < 0\,,$$

$$\vec{D}_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q\vec{R}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad z > 0\,.$$

Найденная функция потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, значит, она является решением рассматриваемой задачи.

Р.22. Однородный шар радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε_1 погружен в однородный неограниченный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_2. На большом расстоянии от шара в диэлектрике имеется однородное электрическое поле $\vec{E}_0$. Найти потенциал и напряженность электрического поля во всем пространстве, а также распределение связанных зарядов на шаре.

Решение рассматриваемой задачи сводится к решению уравнения



Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В сферической системе координат с центром в центре шара и с осью Z вдоль $\vec{E}_0$, в области $R \geq a$ решение будем искать в виде (см. Р.20)

$$\varphi_2 = -E_0 z + A_2 \frac{\vec{E}_0 \vec{R}}{R^3} = -E_0 R \cos\theta + A_2 \frac{E_0 \cos\theta}{R^2}.$$

Введение члена ($-E_0 z$) оправдывается тем, что на больших расстояниях от шара поле должно быть невозмущенным. Второй член учитывает поле от поляризованного шара в виде поля от дипольного момента $\sim E_0$. Для $R \leq a$ решение будем искать в виде

$$\varphi_1 = C_1 E_0 z \equiv C_1 E_0 R \cos\theta \ ,$$

т. е. предполагаем, что поле внутри шара однородно. Мы уже знаем из решения задачи для проводящего шара (см. Р.20) в однородном электрическом поле, что, для того чтобы скомпенсировать внешнее поле, шар приобретает дипольный момент. Заряды на поверхности распределятся таким образом, чтобы поле от них внутри шара равнялось внешнему полю $\vec{E}_0$ и было противоположно ему направлено. Каждый из потенциалов является решением уравнения Лапласа. Если мы подберем константы C_1 и A_2 так, чтобы удовлетворялись граничные условия, то функции φ_1 и φ_2 будут единственным решением поставленной задачи. Из условия непрерывности на поверхности шара потенциала $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ и нормальной составляющей электрической индукции

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R}\bigg|_{R=a} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R}\bigg|_{R=a}$$

следует, что

$$C_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}, \qquad A_2 = a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}.$$

Итак, шар приобретает дипольный момент

$$\vec{d} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} a^3 \vec{E}_0.$$

Распределение потенциала будет иметь вид

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 z \qquad \text{при} \qquad R \le a\ ,$$

$$\varphi_2 = -E_0 z + \frac{\vec{d}\vec{R}}{R^3} = -E_0 R\cos\theta + A_2 \frac{E_0\cos\theta}{R^2} \qquad \text{при} \qquad R \ge a\ .$$

Вычисляя так же, как в задаче Р.20, для напряженности электрического поля получаем выражения

$$\vec{E}_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \vec{E}_0 \qquad \text{при} \qquad R < a,$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 + \frac{\vec{d}}{R^3} + \frac{3(\vec{d}\vec{R})\vec{R}}{R^5} \qquad \text{при} \qquad R > a.$$

Напряженность электрического поля внутри шара больше E_0, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и меньше E_0, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}}$ на границе раздела двух сред определяются формулой $\sigma_{\text{св}} = P_{1n}\big|_{R=a} - P_{2n}\big|_{R=a}$, где P_{1n}, P_{2n} — нормальные составляющие вектора поляризации. Орт нормали $\vec{n}$ проведен из первой среды во вторую. Поскольку

$$\vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi} = \frac{(\varepsilon - 1)\vec{E}}{4\pi}\ ,$$

то

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{1}{4\pi}\left[(\varepsilon_1 - 1)E_{1n}\big|_{R=a} - (\varepsilon_2 - 1)E_{2n}\big|_{R=a}\right]\ .$$

Вычислим E_{1n} и E_{2n} на поверхности шара:

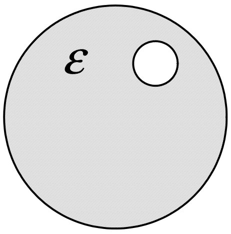
$$E_{1n}\big|_{R=a} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\bigg|_{R=a} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0\cos\theta\ ,$$

$$E_{2n}\Big|_{R=a} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\Big|_{R=a} = E_0\cos\theta + \frac{2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\cos\theta\ .$$

Окончательно

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{3}{4\pi}\,\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\cos\theta\ .$$

Р.23. В однородное электрическое поле $\vec{E}_0$ внесен шар с диэлектрической проницаемостью ε. В шаре имеется маленькая сферическая полость, находящаяся далеко от поверхности шара. Найти поле в полости.



Используя результат задачи Р.22, находим, что поле в шаре, кроме небольшой области около и внутри полости, равно

$$\vec{E} = \frac{3\vec{E}_0}{\varepsilon+2}\ .$$

(Искажение однородного поля вне полости, обусловленное дипольной добавкой, быстро по закону $1/R^3$ падает по мере удаления от полости и не влияет на большую часть шара.) Поле в полости можно найти, используя следующие соображения. Шар по отношению к полости является внешней средой. Поскольку полость мала и находится далеко от границы, то задача сводится к нахождению поля в полости, которая находится в безграничном диэлектрике, где поле вдали от полости $\vec{E} = 3\vec{E}_0/(\varepsilon+2)$. Поэтому поле в полости $\vec{E}_{\text{пол}}$ равно

$$\vec{E}_{\text{пол}} = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon}\vec{E} = \frac{9\varepsilon}{(1+2\varepsilon)(2+\varepsilon)}\vec{E}_0\ .$$

Р.24. Заряд q находится внутри (вне) заземленной (изолированной) проводящей сферы радиуса a на расстоянии l от ее центра. Найти распределение потенциала во всем пространстве, распределение индуцированного заряда и полный индуцированный заряд на сфере.

Распределение потенциала φ в пространстве характеризуется опре-

деленной формой эквипотенциальных поверхностей. В проводниках существуют свободные носители зарядов, которые в электрическом поле приходят в движение. В стационарном случае напряженность электрического поля внутри проводника должна быть равна нулю, иначе будет течь ток, распространение которого в проводнике сопровождается диссипацией энергии, что невозможно без внешних источников энергии. Тангенциальная составляющая электрического поля на поверхности проводника непрерывна, так как $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. Значит, эта составляющая вообще равна нулю, поскольку внутри проводника $\vec{E} = 0$. Таким образом, электрическое поле должно быть нормальным к поверхности проводника в каждой ее точке. Другими словами, поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность электростатического поля.

При помещении проводников в электрическое поле, создаваемое данным распределением зарядов ρ, на их поверхностях возникнут индуцированные заряды, которые изменят поле вне проводников. Поле в проводниках будет равно нулю. Чтобы найти поле вне проводников, нужно решить уравнение Пуассона с прежним распределением ρ заряда вне проводников и условием, чтобы на поверхности каждого проводника потенциал был постоянен. Нахождение решения уравнения Пуассона в общем случае — задача сложная. Ниже для решения задач мы воспользуемся методом изображения, суть которого состоит в том, что поле вне проводников, создаваемое индуцированными зарядами, заменяется полем фиктивных зарядов, называемых изображением данных зарядов. Фиктивные заряды располагают вне области, где определяется поле (поэтому они не изменяют правую часть уравнения Пуассона), таким образом, чтобы поверхности проводников в результирующем поле фиктивных и данных зарядов стали эквипотенциальными. Из теоремы единственности найденное поле и будет полем, создаваемым данными и индуцированными зарядами, если оно удовлетворяет перечисленным в ней условиям.

Теорема единственности утверждает, что если в среде с известной диэлектрической проницаемостью ε заданы расположение и форма проводников, объемная плотность ρ свободных электрических зарядов во всех точках среды и, кроме того, известны:

а) либо потенциалы всех проводников;

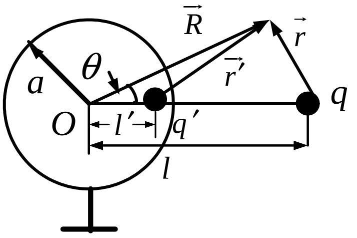
б) либо заряды некоторых проводников и потенциалы всех остальных проводников, то уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \qquad (1)$$

имеет единственное решение. Если заданы только заряды проводников, то потенциал φ определяется с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

а) *Сфера заземлена. Заряд вне сферы.*

Если сфера заземлена, потенциал сферы равен нулю: $\varphi(a) = 0$. Как показано в задаче Р.7, в системе двух разноименных зарядов имеется сферическая эквипотенциальная поверхность нулевого потенциала.



Если заряд q расположен на расстоянии l от центра сферы радиуса a, то изображением этого заряда будет заряд $q' = -qa/l$, который следует поместить на расстояние $l' = a^2/l$ от центра сферы. Таким образом, распределение потенциала и напряженности электрического поля вне сферы, создаваемое зарядом q и индуцированными зарядами на сфере, совпадает с распределением потенциала и напряженности, создаваемым двумя точечными зарядами q и q':

$$\varphi = \frac{q}{r} - \frac{a}{l}\frac{q}{r'} \qquad \text{при} \qquad R \geq a\,,$$

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} - q\frac{a}{l}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} \qquad \text{при} \qquad R > a,$$

где r и r' — расстояния до точки наблюдения от зарядов q и q' соответственно. Потенциал внутри сферы постоянен и равен потенциалу

на сфере $\varphi(a) = 0$.

В полости и на внутренней поверхности сферы нет зарядов. Потенциал сферы удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$. На стенках полости он должен быть константой, равной нулю. Решение, удовлетворяющее этому условию, можно указать сразу: это $\varphi = 0$. По теореме единственности других решений быть не может. Значит, и $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi = 0$ для $R < a$. Равенство нулю электрического поля внутри сферы легко понять из следующих соображений. Если вместо сферы взять проводящий шар того же радиуса, то поле вне шара будет таким же, как поле вне сферы. А поле внутри шара будет равно нулю, поскольку шар — проводник. Не будет внутри шара и объемных зарядов: $\rho = 0$, так как $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. Но такая электронейтральная среда не будет оказывать никакого влияния на величину электрического поля. Поэтому если такую среду удалить, оставляя только проводящую оболочку, то от этого поле нигде не изменится. Оно останется равным нулю во всем пространстве, из которого удалена среда, т. е. внутри сферы.

Найдем распределение поверхностной плотности заряда σ по сфере. На заряженной поверхности, разделяющей области 1 и 2, в вакууме нормальные составляющие электрического поля терпят разрыв $E_{2R}\big|_{R=a} - E_{1R}\big|_{R=a} = 4\pi\sigma$. Поскольку в нашем случае поле с внутренней стороны сферы равно нулю $E_{1R}\big|_{R=a} = 0$, то

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}E_{2R}\bigg|_{R=a}.$$

Найдем напряженность электрического поля на поверхности заземленной сферы. Заметим, что

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{l},$$

$$\vec{R} = \vec{r}\,' + \vec{l}\,'.$$

Используя эти соотношения, получаем

$$\vec{E} = q\left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R}{lr'^3}\right)\vec{R} + \left(\frac{R}{lr'^3}\vec{l'} - \frac{\vec{l}}{r^3}\right)\right] .$$

Покажем, что второе слагаемое в скобках равно нулю на поверхности сферы. Подставляя в него $r = r'l/a$ и $l' = a^2/l$, получаем

$$\left(\frac{R}{lr'^3}\vec{l'} - \frac{l}{r^3}\right)\Bigg|_{R=a} = \left(\frac{a^3}{lr'^3} - \frac{1}{r^3}\right)\vec{l} = \left(\frac{a^3}{l^3}\frac{l^3}{a^3r^3} - \frac{1}{r^3}\right)\vec{l} = 0 .$$

Таким образом, напряженность электрического поля на поверхности сферы, как и следовало ожидать, имеет только нормальную составляющую

$$\vec{E}\big|_{R=a} = q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{R}{lr'^3}\right)\vec{R} .$$

Выражая r и r' через координаты $(R\,,\,\theta\,,\,\alpha)$ в сферической системе

$$r = \left(R^2 + l^2 - 2Rl\cos\theta\right)^{1/2},$$

$$r' = \left(R^2 + l'^2 - 2Rl'\cos\theta\right)^{1/2},$$

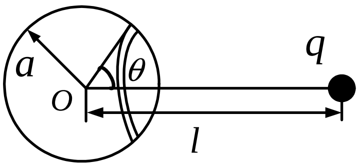
находим

$$E_{2R} = -\frac{q(l^2 - a^2)}{a(a^2 + l^2 - 2al\cos\theta)^{3/2}}.$$

Тогда

$$\sigma = -\frac{q(l^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + l^2 - 2al\cos\theta)^{3/2}}. \qquad (2)$$

Найдем полный заряд на полусфере, обращенной к заряду q.



Заряд на кольце ширины $ad\theta$ радиуса $a\sin\theta$ равен

$$dQ = \sigma \cdot 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta .$$

Тогда величина заряда на полусфере, обращенной к заряду q, будет равна

$$Q_1 = -2\pi a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \frac{q(l^2 - a^2)\sin\theta\, d\theta}{4\pi a(a^2 + l^2 - 2al\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{q(l^2 - a^2)}{2l}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{1}{l - a}\right).$$

Таким же образом найдем заряд на противоположной полусфере:

$$Q_2 = \frac{q(l^2 - a^2)}{2l}\left(\frac{1}{a + l} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}}\right).$$

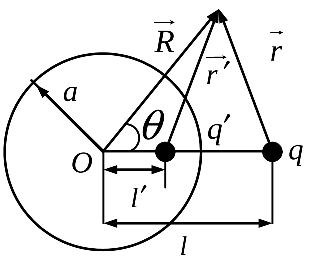
Суммарный заряд на сфере, как и следовало ожидать,

$$Q = Q_1 + Q_2 = -q\frac{a}{l}.$$

То, что полный заряд на сфере равен q', можно понять и не интегрируя поверхностную плотность. Действительно, мы нашли, что вне сферы поле $\vec{E}$ создается зарядами q и q'. Поток вектора через поверхность, внутри которой находится сфера без заряда q, определяется только полем, создаваемым зарядом q', так как поверхность не охватывает заряд q, т. е. $\oint(\vec{E}\,d\vec{s}) = 4\pi q'$. Но это и означает, что полный заряд на поверхности сферы равен q'.

б) *Заряд вне сферы. Сфера изолирована.*

Если сфера изолирована, то полный заряд сферы равен нулю, поэтому для определения поля вне сферы нужно поместить внутри сферы еще один фиктивный заряд $q'' = -q'$. Это легко понять из следующих рассуждений. Вне сферы будет какое-то распределение напряженности электрического поля $\vec{E}$. Если взять поток вектора $\vec{E}$ через поверхность, окружающую сферу, но не окружающую заряд q, то он должен быть по теореме Гаусса равен полному заряду Q, находящемуся внутри объема, ограниченного этой поверхностью, умноженному на 4π:



$$\oint(\vec{E}\,d\vec{s}) = 4\pi Q.$$

Поскольку в действительности сфера не заряжена $Q = 0$, поток должен быть равен нулю. Если мы оставим внутри сферы только заряд

q', то поток будет равен

$$\oint (\vec{E}\, d\vec{s}) = 4\pi q',$$

что неверно, значит, внутрь сферы нужно поместить еще один заряд q'', равный по величине и противоположный по знаку заряду q', $q'' = -q'$.

Заряд q'' нужно поместить в такую точку, чтобы сфера осталась эквипотенциальной поверхностью в системе трех зарядов. Такой точкой является центр сферы. Окончательно

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} - \frac{q'}{R} \qquad \text{при} \qquad R \geq a\,,$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{q'\vec{r}\,'}{r'^3} - \frac{q'\vec{R}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad R > a.$$

Внутри сферы потенциал постоянен и равен потенциалу на сфере

$$\varphi(\vec{R}) = \varphi(a) = \frac{q}{l} \qquad \text{при} \qquad R \leq a,$$

а поле $\vec{E} = 0$. Рассуждения такие же, как и для заземленной сферы.

Проводящая оболочка экранирует внешнее поле заряда q. Распределение заряда по поверхности будет иметь вид

$$\sigma = -\frac{q(l^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + l^2 - 2al\cos\theta)^{3/2}} + \frac{q}{4\pi al} =$$

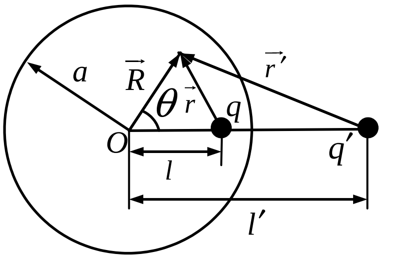
$$= \frac{q}{4\pi a^2}\left(\frac{a}{l} - \frac{a(l^2 - a^2)}{(a^2 + l^2 - 2al\cos\theta)^{3/2}}\right).$$

в) *Заряд внутри сферы. Сфера изолирована.*

Заряд на сфере равен нулю, поскольку сфера была не заряжена. Если заменить сферу сферическим проводящим слоем некоторой толщины с внутренним радиусом, равным радиусу сферы, то поток вектора $\vec{E}$ через поверхность, проходящую в толще слоя, равен нулю,

так как поле в проводнике $\vec{E} = 0$. Отсюда следует, что на внутренней поверхности слоя индуцируется заряд $(-q)$, на внешней — q. Поля внесенного заряда q и индуцированного на внутренней поверхности заряда $(-q)$ полностью компенсируют друг друга в толще слоя и во всем внешнем пространстве. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить все внешнее пространство заполненным проводящей средой. В проводящей среде $\vec{E} = 0$, поэтому $\rho = 0$. Если теперь убрать электронейтральную среду, то ничего не изменится, поле останется равным нулю и распределение заряда на внутренней оболочке не зависит от толщины оболочки, а зависит только от места нахождения заряда q.

Чтобы индуцированный на внешней поверхности слоя заряд q не создавал в толщине слоя поле, он должен распределиться равномерно. Понятно, что равномерность распределения заряда на внешней поверхности слоя сохранится, если толщину слоя устремить к нулю. Напряженность электрического поля вне сферы от равномерно распределенного по поверхности сферы заряда q будет такая же, как от точечного заряда q, помещенного в центр сферы:



$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{q\vec{R}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad R > a\,,$$

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{q}{R} \qquad \text{при} \qquad R \geq a\,.$$

Причем поле вне сферы не зависит от того, где внутри сферы находится внесенный заряд q.

Следует заметить, что потенциал вне сферы удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$ и что этот потенциал на сфере должен быть константой. Но решение $\varphi = \mathrm{const}$ и соответственно $\vec{E} = 0$ во всей области вне сферы будет неверным. Действительно, проводящая сфера делит все пространство на две области: внутреннюю с границей, на

которой заряд $(-q)$, и внешнюю с границей, где заряд $(+q)$. Из решения $\vec{E}=0$ следует, что на внешней границе $\sigma=0$. А это не верно.

Потенциал

$$\varphi(\vec{R})=\frac{q}{r}+\frac{q^{\prime}}{r^{\prime}}+\mathrm{const} \qquad \text{при} \qquad R\leq a.$$

Из условия непрерывности потенциала на поверхности сферы следует, что $\mathrm{const}=q/a$. Заряды q и $q^{\prime}$ обладают свойством взаимности: если $q^{\prime}$ является изображением заряда q, то и обратно заряд q является изображением заряда $q^{\prime}$. Заряды q и $q^{\prime}$ создают на сфере потенциал, равный нулю. Напряженность электрического поля внутри сферы

$$\vec{E}=\frac{q\vec{r}}{r^{3}}-q\frac{a}{l}\frac{\vec{r}^{\,\prime}}{r^{\prime 3}} \qquad \text{при} \qquad R<a.$$

Поступая так же, как при выводе формулы (2), находим распределение заряда на внутренней поверхности сферы:

$$\sigma=-\frac{q(a^{2}-l^{2})}{4\pi a(a^{2}+l^{2}-2al\cos\theta)^{3/2}}\,.$$

Заряды на полусферах будут равны

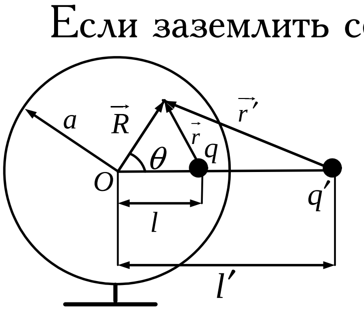
$$Q_{1}=\frac{q(a^{2}-l^{2})}{2l}\left(\frac{1}{\sqrt{a^{2}+l^{2}}}-\frac{1}{a-l}\right),$$

$$Q_{2}=\frac{q(a^{2}-l^{2})}{2l}\left(\frac{1}{a+l}-\frac{1}{\sqrt{a^{2}+l^{2}}}\right).$$

Полный заряд на внутренней поверхности сферы, как и следовало быть, $Q_{1}+Q_{2}=-q$.

г) *Заряд внутри сферы. Сфера заземлена.*

Если заземлить сферу, рассмотренную выше, то потенциал сферы сравняется с потенциалом земли $\varphi=0$ и заряд q с внешней поверхности сферы стечет в землю. Поэтому



$$\varphi=0 \qquad \text{при} \qquad R\geq a,$$

$$\vec{E} = 0 \qquad \text{при} \qquad R > a.$$

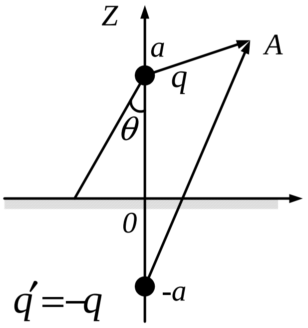
Напряженность электрического поля внутри сферы и распределение заряда по внутренней поверхности сферы не изменятся, останутся такими же, как для изолированной сферы. Потенциал

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}, \qquad \text{при} \qquad R \le a.$$

Таким образом, заземленная сфера экранирует поле заряда, помещенного внутрь сферы.

Р.25. Точечный заряд q находится в вакууме на расстоянии a от плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциал, напряженность электрического поля, поверхностную плотность индуцированного заряда, а также силу, действующую на заряд.

В верхнем полупространстве потенциал поля, создаваемого зарядом q и индуцированными зарядами на проводнике, можно представить как потенциал поля, создаваемого зарядом q и его изображением $q' = -q$ по другую сторону плоскости раздела на таком же расстоянии от нее. Действительно, потенциал поля точечных зарядов q и q' в какой-либо точке A над поверхностью проводника



$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \qquad \text{при} \qquad z \ge 0\,. \tag{1}$$

Этот потенциал обращается в нуль на поверхности проводника $(r = r')$, а поэтому поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью (см. Р.24) в системе зарядов q и $(-q)$. Функция (1) является решением уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi q\delta(\vec{r})$ для верхнего полупространства $z \ge 0$, где $\delta(\vec{r})$ — дельта функция. Это решение удовлетворяет граничному условию $\varphi(\vec{r}) = 0$ при $z = 0$. По теореме

единственности оно и есть искомое решение. В нижнем полупространстве, заполненном проводящей средой, поле равно нулю. Поэтому

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} - \frac{q\vec{r}^{\,\prime}}{r^{\prime 3}} \qquad \text{при} \qquad z > 0,$$

$$\vec{E} = 0 \qquad \text{при} \qquad z < 0\,.$$

Индуцированные заряды притягивают заряд q с той же силой, что и фиктивный заряд $q^{\prime} = -q$, поскольку он создает в верхнем полупространстве такое же поле, что и индуцированные заряды. Эта сила равна

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{4a^2}\,\frac{\vec{z}}{z}.$$

Поверхностная плотность индуцированных зарядов найдется по формуле

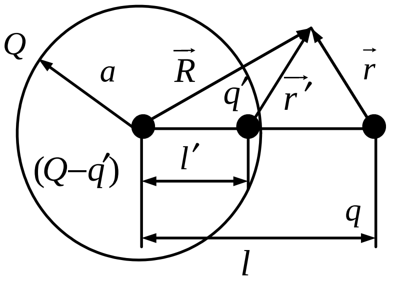
$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_z \Big|_{z=0} = -\frac{q}{2\pi a^2}\cos^3\theta\,,$$

где $E_z\Big|_{z=0}$ — нормальная составляющая поля при $z = 0$. Проверьте, что касательная составляющая поля равна нулю при $z = 0$. Полный заряд, индуцированный на поверхности проводника:

$$Q = -\int\limits_0^{\pi/2} \frac{q}{2\pi a^2}\cos^3\theta \cdot 2\pi a^2 \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta = -q\,.$$

Р.26. Заряд q находится на расстоянии l от проводящей изолированной сферы радиуса $a < l$ с зарядом Q. Найти силу взаимодействия заряда со сферой. При каком значении заряда на сфере эта сила обращается в нуль?

Сила взаимодействия заряженной сферы с зарядом q есть сила, с которой действует сфера на заряд q. Эта сила равна $\vec{F} = q\vec{E}(l)$,



где $\vec{E}(l)$ — напряженность электрического поля, которая создается заряженной сферой на месте заряда q. Для нахождения поля $\vec{E}(l)$ воспользуемся методом изображений (см. Р.24). Как было показано в задаче Р.24, поле индуцированных зарядов незаряженной сферы можно представить суперпозицией полей, создаваемых двумя точечными зарядами: $q' = -qa/l$, расположенным на расстоянии $l' = a^2/l$ от центра сферы, и $(-q')$, расположенным в центре сферы. Нетрудно понять, что в случае заряженной сферы для определения поля во внешнем пространстве, создаваемого сферой, нужно к зарядам q' и $(-q')$ добавить заряд сферы, поместив его в центр, чтобы поверхность сферы осталась эквипотенциальной. Итак,

$$\vec{E}(l) = \left[\frac{(Q + qa/l)}{l^2} - \frac{qa/l}{(l - l')^2}\right]\frac{\vec{l}}{l} = \left[\frac{Q}{l^2} - \frac{qa^3(2l^2 - a^2)}{l^3(l^2 - a^2)^2}\right]\frac{\vec{l}}{l},$$

$$\vec{F} = \left[\frac{Qq}{l^2} - \frac{q^2a^3(2l^2 - a^2)}{l^3(l^2 - a^2)^2}\right]\frac{\vec{l}}{l}.$$

Если заряд

$$Q > q\frac{a^3(2l^2 - a^2)}{l(l^2 - a^2)^2},$$

то сфера отталкивает заряд q. При

$$Q < q\frac{a^3(2l^2 - a^2)}{l(l^2 - a^2)^2}$$

сфера притягивает заряд q. Когда

$$Q = q\frac{a^3(2l^2 - a^2)}{l(l^2 - a^2)^2},$$

сила равна нулю. Сила, действующая со стороны заряда на сферу, равна $(-\vec{F})$.

Р.27. Между двумя заземленными концентрическими сферами с радиусами a и b $(a > b)$ на расстоянии c от общего центра сфер находится точечный заряд q. Найти заряды на сферах.

Используя метод изображения, находим, что заряд, индуцированный на сфере радиуса b, представляется бесконечной суммой зарядов:

$$Q_b = -q\frac{b}{c} + q\frac{b}{a} - q\frac{b}{c}\frac{b}{a} + q\frac{b}{a}\frac{b}{a} - q\frac{b}{c}\frac{b^2}{a^2} + q\frac{b}{a}\frac{b^2}{a^2} - q\frac{b}{c}\frac{b^3}{a^3} + \ldots =$$

$$= -q\frac{b}{c} + q\left(1 - \frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \ldots\right) = -q\frac{b(a-c)}{c(a-b)}.$$

Заряд на внешней сфере

$$Q_a = -\left(q - q\frac{b(a-c)}{c(a-b)}\right) = -q\frac{a(c-b)}{c(a-b)}\,.$$

Более простой, но, возможно, менее красивый метод решения таков: в центре сферы радиуса b потенциал

$$\varphi(0) = \frac{Q_b}{b} + \frac{q}{c} + \frac{Q_a}{a} = 0\,,$$

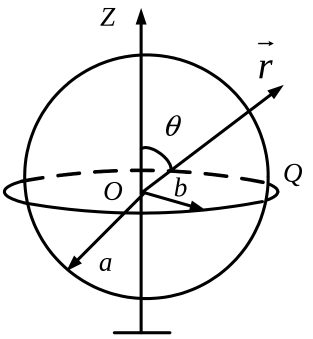
так как сфера заземлена. Суммарный заряд $Q_a + q + Q_b = 0$, так как заземлена и внешняя сфера радиуса a, и поэтому поле снаружи должно быть равно нулю. Система уравнений приводит к тем же ответам, что и предыдущее решение.

Р.28. В экваториальной плоскости заземленной сферы радиуса a находится равномерно заряженное зарядом Q кольцо радиуса $b > a$. Центры сферы и кольца совпадают. Найти:

а) потенциал $\varphi(z)$ на оси симметрии системы на расстоянии z от центра кольца;

б) два первых ненулевых члена разложения потенциала $\varphi(r, \theta)$ на больших $r \gg b$ расстояниях.

Для решения задачи воспользуемся методом изображения.



Изображением кольца радиуса b с зарядом Q в сфере радиуса a будет кольцо радиуса $l = a^2/b$ с зарядом $q = -Qa/b$.

а) Потенциал $\varphi(z)$ на оси симметрии системы на расстоянии $z > a$ от центра кольца есть сумма потенциалов от заряженного кольца и от его изображения

$$\varphi(z) = \frac{Q}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{Q\cdot a/b}{\sqrt{b^2z^2+a^4}}\,b = \frac{Q}{\sqrt{z^2+b^2}} - \frac{Qa}{\sqrt{b^2z^2+a^4}}.$$

б) Используя решение задачи Р.13, находим, что

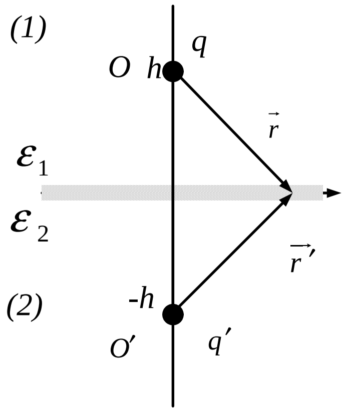
$$\varphi(r,\theta) = \frac{Q}{r} + \frac{Q}{4}\,\frac{b^2}{r^3}(1-3\cos^2\theta) - \frac{Qa/b}{r} - \frac{Qa/b}{4r^3}\left(\frac{a^2}{b}\right)^2(1-3\cos^2\theta) =$$

$$= \frac{Q}{r}\left(1-\frac{a}{b}\right) + \frac{Q}{4r^3}\left(b^2-\frac{a^5}{b^3}\right)(1-3\cos^2\theta) =$$

$$= \frac{Q}{r}\left(1-\frac{a}{b}\right) + \frac{Qb^2}{4r^3}\left(1-\frac{a^5}{b^5}\right)(1-3\cos^2\theta) \text{ при } r >> b.$$

Р.29. Полупространства заполнены диэлектриками с различающимися значениями проницаемостей: ε_1 и ε_2. Бесконечная прямая нить, заряженная с линейной плотностью η, расположена перпендикулярно плоскости раздела диэлектриков. Найти силу, действующую на единицу длины нити на высоте h над плоскостью раздела диэлектриков.

Решим сначала задачу о распределении электрического поля, когда в диэлектрике с проницаемостью ε_1 находится заряд q на расстоянии h от плоской границы раздела. Поле в первом диэлектрике $\vec{E}_1$ будет создаваться зарядом q и поляризационными зарядами, которые возникнут на границе раздела диэлектриков. По методу изоб-



ражения попытаемся подобрать величину заряда q' такой, чтобы поле от него в первом диэлектрике было эквивалентно полю поляризационных зарядов, когда q' находится в точке O', зеркально симметричной с точкой O относительно границы раздела, т. е.

$$\vec{E}_1 = \frac{q\vec{r}}{\varepsilon_1 r^3} + \frac{q'\vec{r}\,'}{\varepsilon_1 r'^3},$$

где $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ — радиус-векторы, проведенные из зарядов q и q' в рассматриваемую точку.

Поле во втором диэлектрике $\vec{E}_2$ будем искать как поле фиктивного заряда q'', находящегося в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_2, но пространственно совмещенного с зарядом q, т. е.

$$\vec{E}_2 = \frac{q''\vec{r}}{\varepsilon_2 r^3}.$$

Каждое из этих полей является решением уравнения Лапласа, и если нам удастся удовлетворить граничным условиям, то $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ в силу теоремы единственности будут описывать действительное поле.

Из уравнений $\operatorname{div}\vec{D} = 0$ и $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ следуют условия непрерывности на границе раздела двух диэлектриков нормальных компонент D_n вектора $\vec{D}$ и касательных компонент E_τ вектора $\vec{E}$:

$$q\cos\theta - q'\cos\theta = q''\cos\theta\,,$$

$$\frac{q}{\varepsilon_1}\sin\theta + \frac{q'}{\varepsilon_1}\sin\theta = \frac{q''}{\varepsilon_2}\sin\theta\,.$$

Из этой системы уравнений находим

$$q' = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q\,, \qquad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}q\,.$$

Поскольку угол θ выпадает из уравнений, граничные условия будут удовлетворены во всех точках границы раздела и полученные поля $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ являются решением задачи.

Теперь решим задачу с бесконечной прямой нитью, расположенной перпендикулярно плоскости раздела диэлектриков. Поместим начало координат на границу раздела диэлектриков, ось z направим из первой среды во вторую.

Сила, действующая на единицу длины заряженной нити, находящейся на высоте h над плоскостью раздела диэлектриков,

$$\vec{F} = \eta \vec{E}(-h)\,,$$

где $\vec{E}(-h)$ — электрическое поле в точке $z = -h$, которое, основываясь на решении вышеизложенной задачи, можно представить как суперпозицию полей трех нитей:

$$\vec{E}(-h) = \vec{E}_1'(-h) + \vec{E}_2'(-h) + \vec{E}_1(-h)\,,$$

где $\vec{E}_1'(-h)$ — поле в точке $z = -h$, создаваемое фиктивным зарядом, расположенным на полуоси $z \geq 0$ в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1 и с линейной плотностью

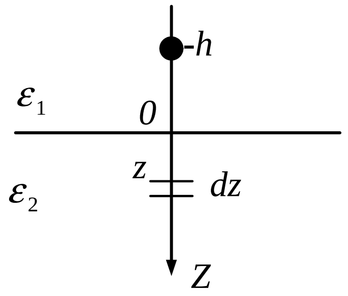
$$-\frac{\eta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1};$$

$\vec{E}_2'(-h)$ – поле, создаваемое фиктивным зарядом, расположенным на полуоси $z \geq 0$ в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1 и с линейной плотностью $2\varepsilon_2\eta/(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$; $\vec{E}_1(-h)$ – поле действительного заряда, расположенного на нити при $z < -2h$ с зарядом η на единице длины, в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1. Поля $\vec{E}_1'(-h)$ и $\vec{E}_1(-h)$ – поля в точке $z = -h$.

Найдем поле $\vec{E}_1'(-h)$. Поле $d\vec{E}_1'(-h)$, создаваемое зарядом

$$-\frac{\eta(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\,dz\,,$$

находящимся на расстоянии z от начала координат



$$d\vec{E}_1'(-h) = -\frac{\eta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\frac{dz}{(z+h)^2}\frac{\vec{z}}{z}.$$

Тогда

$$\vec{E}_1'(-h) = \int_0^\infty d\vec{E}_1' = \frac{\eta(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)h}\frac{\vec{z}}{z}.$$

Аналогично найдем

$$\vec{E}_2'(-h) = -\frac{2\eta}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)h}\frac{\vec{z}}{z},$$

$$\vec{E}_1(-h) = \frac{\eta}{\varepsilon_1 h}\frac{\vec{z}}{z}.$$

Окончательно, сила, действующая на единицу длины нити,

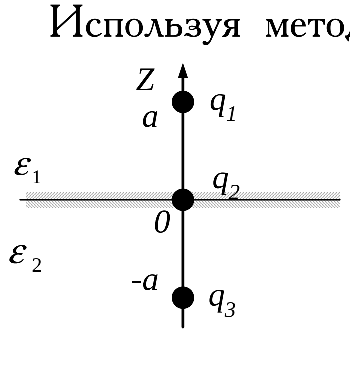
$$\vec{F} = \frac{2\eta^2}{h}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\frac{\vec{z}}{z}.$$

Р.30. Полупространства заполнены диэлектриком: верхнее с проницаемостью ε_1, нижнее — ε_2. На оси, перпендикулярной плоскости раздела, расположены три заряда: q_1, q_2 и q_3. В начале координат расположен заряд q_2, а q_1 и q_3 — симметрично на расстоянии a от заряда q_2. Найти силу, действующую на заряд q_1.

Поле, создаваемое зарядом q_2 , будет иметь вид (см. Р.21)

$$\vec{E}_2 = \vec{E} = \frac{2q_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{\vec{R}}{R^3}.$$

Используя метод изображений (см. Р.29), находим, что поле,



которое возникнет на месте заряда q_1, когда в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_2 вносится заряд q_3, равно

$$E_3'' = \frac{2\,q_3\,\varepsilon_1}{(2a)^2\,\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\frac{\vec{z}}{z}.$$

Заряд q_1 через поле поляризационных зарядов на границе раздела создает на месте своего нахождения дополнительное поле $\vec{E}_1'$:

$$\vec{E}_1' = -\frac{q_1}{4a^2}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\,\frac{\vec{z}}{z}\,.$$

Основываясь на принципе суперпозиции, окончательно находим силу, действующую на заряд q_1 :

$$\vec{F} = \left[\frac{2q_2q_1}{a^2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)} + \frac{q_3q_1}{2a^2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)} - \frac{q_1^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{4a^2\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}\right]\frac{\vec{z}}{z}\,.$$

Р.31. Найти энергию электростатического поля, заряженного равномерно по объему шара, через плотность энергии и через плотность заряда и потенциал. Заряд шара Q, радиус a.

Энергия электростатического поля может быть подсчитана по двум эквивалентным формулам:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int(\vec{E}\vec{D})\,dv \qquad (1)$$

и

$$W = \frac{1}{2}\int\varphi\,dq\,, \qquad (2)$$

где $\vec{E}$,$\vec{D}$ — векторы электрической напряженности и электрической индукции поля, φ — потенциал поля в месте нахождения заряда dq. Первый интеграл берется по всему объему, где $\vec{E}\neq 0$, во втором интеграле интегрирование ведется по всем зарядам системы.

Найдем энергию электростатического поля шара, равномерно заряженного с плотностью ρ. Используя распределение поля для заряженного шара (см. Р.9) и полагая $\varepsilon = 1$, находим

$$W = \frac{1}{8\pi}\left[\int\limits_0^a\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^2R^2{\cdot}4\pi R^2\,dR + \int\limits_a^\infty\left(\frac{4}{3}\pi\rho\right)^2\frac{a^6}{R^4}{\cdot}4\pi R^2\,dR\right] = \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{a}\,,$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$ — полный заряд шара.

Распределение потенциала внутри шара

$$\varphi(R) = \frac{Q}{a} + \frac{Q}{2a}\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right) \qquad \text{при} \qquad R \le a\,.$$

Подставляя потенциал в формулу (2), получаем

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \left[\frac{Q}{a} + \frac{Q}{2a}\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)\right]\rho \cdot 4\pi R^2\,dR = \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{a}.$$

Энергию можно найти и как работу, которую нужно совершить, чтобы «слепить» равномерно заряженный шар. Если уже «слепили» шар радиуса R, то, чтобы нарастить его на dR, нужно добавить к нему заряд $dQ = \rho \cdot 4\pi R^2\,dR$. Работа, которую следует совершить, чтобы преодолеть силу отталкивания при наращивании слоя толщиной dR, равна

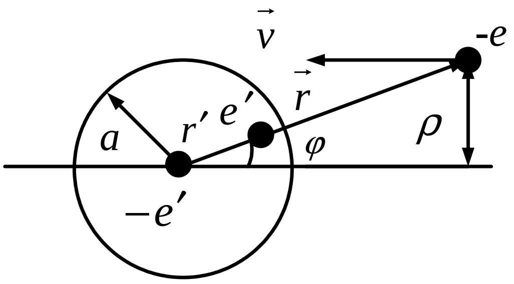
$$dA = \frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{R} \cdot \rho \cdot 4\pi R^2\,dR = \frac{3Q^2R^{\,4}}{a^6}\,dR\,.$$

Интегрируя по всем слоям, находим

$$W = A = \frac{3Q^2}{a^6}\int\limits_0^a R^{\,4}\,dR = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{a}\,.$$

Р.32. Найти сечение захвата электронов (заряд — e, масса — m, скорость на бесконечности — v_0) абсолютно проводящей нейтральной закрепленной сферой радиуса a.

Движение электрона в поле индуцированных зарядов сферы эквивалентно движению в поле двух зарядов: $e^{'} = ea/r$ и $(-e^{'})$, расположенных соответственно в центре и на расстоянии $r^{'} = a^2/r$, где r— расстояние от центра сферы до летящего электрона (см. Р.24).



При движении электрона заряды изображения и электрон будут находиться на одной прямой, проходящей через центр сферы, поэтому можно считать, что электрон движется в центрально-симметричном поле. В центрально-симметричных полях сохраняется момент количества движения и, значит, движение частиц плоское.

Выбирая полярную систему координат в плоскости движения электрона с началом в центре сферы, запишем закон сохранения энергии

$$U+\frac{mv_r^2}{2}+\frac{mv_\varphi^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}\,, \tag{1}$$

где v_r, v_φ — проекции скорости электрона на направление радиус-вектора $\vec{r}$ и на перпендикулярное к нему направление, U — энергия взаимодействия электрона со сферой

$$U=-\frac{e^2a^3}{2r^2(r^2-a^2)}\,.$$

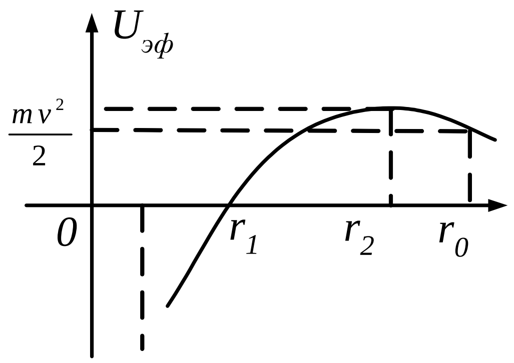
Исключив скорость v_φ из уравнения (1), воспользовавшись выражением для момента количества движения $M=mv_\varphi r$, получим

$$\frac{mv_r^2}{2}+U_{\text{эф}}=\frac{mv_0^2}{2}\,, \tag{2}$$

где

$$U_{\text{эф}}=\frac{M^2}{2mr^2}-\frac{e^2a^3}{2r^2(r^2-a^2)} \tag{3}$$

есть эффективное поле, в котором происходит одномерное (по r) движение электрона. График функции $U_{\text{эф}}$ показан на рисунке. Из этого графика и из уравнения (2) следует, что если энергия электрона, равная $mv_0^2/2$, меньше, чем максималь-



ное значение эффективной энергии $\left(U_{эф}\right)_{max}$, то минимальное расстояние r_0, на которое может подойти электрон, определяется равенством

$$U_{эф}(r_0) = \frac{mv_0^2}{2}\,.$$

Если энергия электрона больше $\left(U_{эф}\right)_{max}$, то электрон упадет на сферу. Найдем $\left(U_{эф}\right)_{max}$ при некотором моменте M электрона.

Дифференцируя по r выражение (3) и приравнивая производную нулю $dU_{эф}/dr = 0$, находим

$$M^2r^4 - 2r^2X + a^2X = 0\,, \tag{4}$$

где введено обозначение $X = M^2a^2 + m\,e^2a^3$. Решая уравнение (4), получаем

$$r^2 = r_1^2 \pm r_1\,\frac{\sqrt{me^2a^3}}{M}\,, \tag{5}$$

где

$$r_1^2 = a^2 + \frac{me^2a^3}{M^2}$$

есть расстояние, на котором обращется в нуль $U_{эф}$, $\Big(U_{эф}(r_1) = 0\Big)$. В соотношении (5) нужно выбрать знак «+», иначе $r < a$. Итак,

$$r_2^2 = r_1^2 + r_1\sqrt{\frac{me^2a^3}{M^2}}\,, \qquad \left(U_{эф}\right)_{max} = U_{эф}(r_2)\,.$$

Подставляя r_2 в уравнение

$$U_{эф}(r_2) = \frac{mv_0^2}{2}\,, \tag{6}$$

находим предельное значение момента M_0, а с ним и прицельного параметра ρ_0 $\big(M_0 = mv_0\rho_0\big)$, такое, что при $M < M_0$ электроны захватываются сферой.

После несложных арифметических преобразований уравнения (6) получим промежуточное уравнение

$$\frac{mv_0}{M_0}\left(r_1+\sqrt{\frac{me^2a^3}{M}}\right)=1,$$

откуда следует

$$\frac{M_0^2}{m^2v_0^2}-\frac{2\sqrt{me^2a^3}}{mv_0}=a^2. \tag{7}$$

Заменяя в уравнении (7) M_0 на $mv_0\rho_0$, окончательно находим

$$\rho_0^2=a^2\left(1+2\sqrt{\frac{e^2a}{mv_0^2}}\right),$$

сечение захвата

$$\sigma=\pi\rho_0^2=\pi a^2\left(1+2\sqrt{\frac{e^2a}{mv_0^2}}\right).$$

Р.33. Найти сечение рассеяния на малые углы электронов (заряд — e, масса — m, скорость на бесконечности — v_0), пролетающих с большим прицельным параметром ρ мимо шара радиуса a, если:

а) шар проводящий и заземлен;

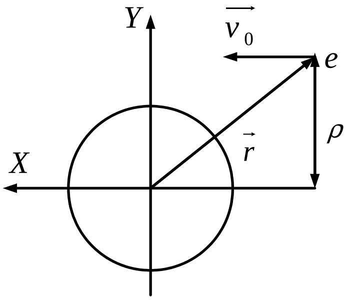
б) шар проводящий и изолирован;

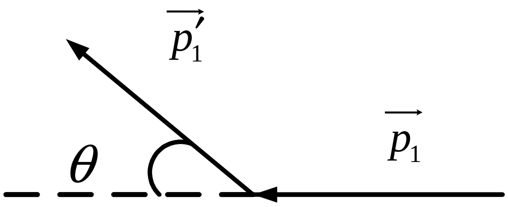
в) шар диэлектрический с проницаемостью ε .

Рассеяние на малые углы означает, что рассматриваются столкновения на больших прицельных расстояниях, где поле соответственно будет слабое. Выберем оси (X,Y) так, как показано на рисунке.

Пусть $\vec{P}_1$ — импульс частицы до рассеяния, $\vec{P}_1{}'$ — после рассеяния, тогда $\sin\theta=P_{1y}'/P_1'$. Поскольку при малых углах $\sin\theta\approx\theta$, $P_1'\approx P_1=mv_0$, то $\theta\approx P_{1y}'/mv_0$. С другой стороны,

$$P_{1y}'=\int\limits_0^\infty F_y\,dt.$$





Переходя от интегрирования по t к интегрированию по r и используя приближенные соотношения

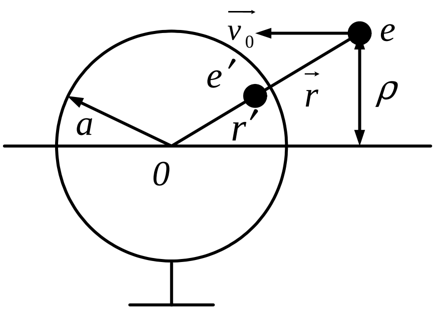
$$dt \simeq \frac{dx}{v_0}, \qquad r^2 \simeq x^2 + \rho^2, \qquad dx \simeq \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}},$$

$$F_y = F_r \cdot \frac{\rho}{r},$$

получаем

$$\theta \simeq \frac{2\rho}{mv_0^2} \int\limits_{\rho}^{\infty} F_r \frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}. \qquad (1)$$

а) *Проводящий шар заземлен.*



В этом случае рассеяние происходит в поле заряда $e' = -ea/r$, находящегося на расстоянии $r' = a^2/r$ от центра (см. Р.24). Сила, действующая на электрон:

$$F_r = \frac{-e^2 ar}{(r^2-a^2)^2}.$$

Подставляя силу в уравнение (1) и используя при малых углах неравенство $r \gg a$, получаем

$$\theta \approx \frac{\pi a e^2}{2mv_0^2\rho^2},$$

откуда

$$\rho^2 \approx \frac{\pi a^2 e^2}{2mv_0^2\theta}. \qquad (2)$$

Связь дифференциального эффективного сечения $d\sigma$ с прицельным параметром ρ имеет вид $d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\,d\rho$. Деля обе части этого равенства на элемент телесного угла $d\Omega = 2\pi\sin\theta\,d\theta \approx 2\pi\theta\,d\theta$ и делая несложные преобразования, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\rho^2}{\partial\theta}\right|\frac{d\theta}{\theta}\,. \tag{3}$$

Окончательно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\pi a e^2}{4mv_0^2}\,\frac{1}{\theta^3}\,.$$

б) *Проводящий шар изолирован.*

В этом случае сила, действующая на электрон,

$$F_r \approx \frac{2e^2a^3}{r^5}\,.$$

Подставим выражение для силы в формулу (1), получим связь угла рассеяния с прицельным параметром

$$\theta \approx \frac{3\pi a^3e^2}{4mv_0^2\rho^4}\,.$$

Откуда

$$\rho^2 \approx \sqrt{\frac{3\pi a^3e^2}{4mv_0^2}}\,\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,,$$

и дифференциальное эффективное сечение рассеяния (3) для электронов на изолированном проводящем шаре

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{\pi a^2}{8}\sqrt{\frac{3e^2/a}{\pi mv_0^2}}\,\theta^{-5/2}\,.$$

в) *Шар диэлектрический с проницаемостью ε.*

В этом случае

$$F_r = -e^2(\varepsilon-1)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l(l+1)}{(\varepsilon l+l+1)}\frac{a^{2l+1}}{r^{2l+3}}\,.$$

Ограничимся первым слагаемым, поскольку $r \gg a$, тогда

$$F_r = -e^2 \frac{2(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 2)} \frac{a^3}{r^5},$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \frac{a^3 e^2}{m v_0^2} \frac{(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon + 2)} \frac{1}{\rho^4}.$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi a^2}{8} \left(\frac{3}{4} \frac{e^2/a}{m v_0^2} \frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 2)} \right)^{1/2} \theta^{-5/2}.$$

3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Направленное движение электрических зарядов q — ток J.

$$J = dq/dt.$$

Вектор плотности тока $\vec{j} = \rho \vec{v} = e n \vec{v}$.
Закон Ома в дифференциальной форме: $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.
Для линейных проводников закон Ома $J = U/R$, где $R = l/(\sigma S)$.
Закон сохранения заряда в интегральной форме

$$dq/dt = -\oint j_{1n} dS,$$

а в дифференциальной форме: $\partial \rho / dt = -\operatorname{div} \vec{j}$.
Для стационарных токов $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, откуда следует граничное условие $j_{1n}| = j_{2n}|$.
Из потенциальности поля $\vec{E}$ следует $E_{1\tau}| = E_{2\tau}|$ или $\frac{j_{1\tau}}{\sigma_1}| = \frac{j_{2\tau}}{\sigma_2}|$.
Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

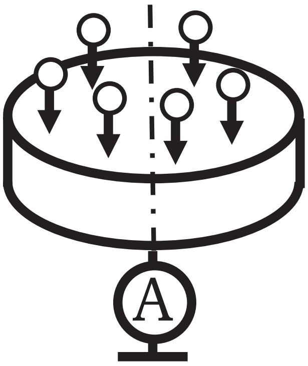
$$\Delta \varphi = -4\pi\rho, \text{ где } \vec{E} = -\nabla\varphi, \ E_{1\tau}| = E_{2\tau}|, \ \sigma_1 E_{1n}| = \sigma_2 E_{2n}|.$$

По найденному $\vec{E}$ и закону Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ находим вектор плотности тока $\vec{j}$.

Правила Кирхгофа $\sum J_i = 0$, $\sum \mathcal{E}_k = \sum J_i R_i$.
Закон Джоуля—Ленца: мощность $N = \int \sigma E^2 dV = \int \frac{j^2}{\sigma} dV$.
Вольтамперная характеристика для вакуумного диода — закон '3/2':
$j = \frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{U^{3/2}}{d^2}$.
Заметим, что $Jd\vec{l} = \vec{j}dS = \vec{v}dq$.

3.1. Сохранение заряда. Граничные условия. Закон Ома

3.1. На полый металлический цилиндр, радиус крышек-торцов которого равен a, падает параллельно оси цилиндра однородный поток электронов. Заряд электрона — e, скорость — v, число электронов в единице объема — n. Собираемый заряд через амперметр, подсоединенный к центру нижнего торца, уходит на землю. Найти распределение тока на торцах: $j_{1,2}(R)$.



3.2. Пучок заряженных частиц с массой m, зарядом q и скоростью v_0 каждая влетает в пространство с электрическим полем $\vec{E}$ в направлении вдоль поля и проходит в нем путь ℓ. Найти плотность тока пучка на выходе, если на входе она равна j_0, а также скорость и плотность числа частиц в пучке.

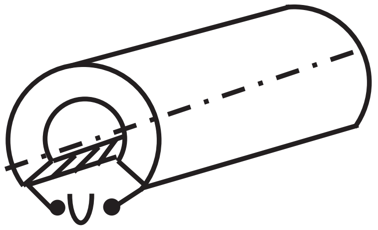
3.3. В бесконечную проводящую с проводимостью σ и проницаемостью ε среду помещен заряд Q. Найти время релаксации, т. е. время, в течение которого заряд в этой точке уменьшится в e раз.

3.4. Найти закон преломления линий тока на плоской поверхности раздела двух сред с проводимостями σ_1 и σ_2.

3.5. Пространство между бесконечно длинными коаксиальными идеально проводящими цилиндрами радиусов a, b заполнено веществом с проводимостью $\sigma(r) = \alpha r^n$. Найти распределение потенциала в пространстве между цилиндрами и сопротивление на единицу длины. Потенциалы цилиндров: $U(a) = 0$, $U(b) = U_0$.

3.6. Сферический конденсатор (R_1, R_2) заполнен веществом с проводимостью, обратно пропорциональной расстоянию до центра системы. Разность потенциалов между обкладками U, а ток — J. Найти распределение потенциала.

3.7. Из толстой длинной трубы с радиусами a и b, сделанной из материала с проводимости σ, вырезана вдоль оси часть с угловым размером α_0. К продольным плоскостям разреза подведено напряжение U. Найти распределение плотности тока $j(r)$ по сечению отрезка трубы и сопротивление единицы длины. Краевыми эффектами пренебречь.



3.8. Постоянный ток J течет по бесконечному прямому сплошному цилиндру радиуса R_0 с проводимостью $\varkappa$. Цилиндр окружен толстой коаксиальной с ним проводящей цилиндрической оболочкой, служащей обратным проводом с радиусами R_1 и R_2. Найти распределение поверхностных зарядов σ.

3.9. Найти стационарное поле E в плоском конденсаторе с напряжением U, диэлектрик которого состоит из двух слоев толщины ℓ_1, ℓ_2 с диэлектрическими постоянными ε_1, ε_2 и проводимостями σ_1, σ_2. Определить свободный и связанный заряды на границе раздела сред.

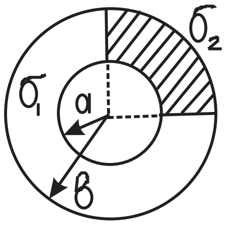
3.10. Пространство между параллельными проводящими плоскостями с проводимостью σ_0 (расстояние между ними равно d) заполнено проводящей средой, проводимость которой меняется по закону $\sigma = \sigma_1 + \alpha x$ (x — координата в направлении, перпендикулярном плоскостям; $\sigma_0 \gg \sigma$). Найти распределение потенциала и объемную плотность пространственного заряда, если к плоскостям приложена разность потенциалов U.

3.11. Между обкладками сферического конденсатора с радиусами a, b $(b > a)$ находятся два сферических слоя вещества с проводимостями σ_1 и σ_2 и диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Радиус поверхности, разделяющей слои, равен c. К обкладкам приложено на-

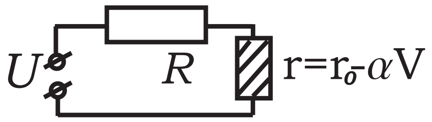
пряжение U. Найти плотность свободных зарядов на границе раздела сред.

3.12. Три проводника с круглыми сечениями одного и того же радиуса r соединены последовательно, образуя замкнутое кольцо. Длины проводников $\ell_0,\ \ell_1,\ \ell_2 \gg r$, проводимости $\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2$. По объему проводника с проводимостью σ_0 распределена сторонняя эдс $\mathcal{E}_0$, не зависящая от времени. Найти электрическое поле и распределение электрических зарядов внутри кольца.

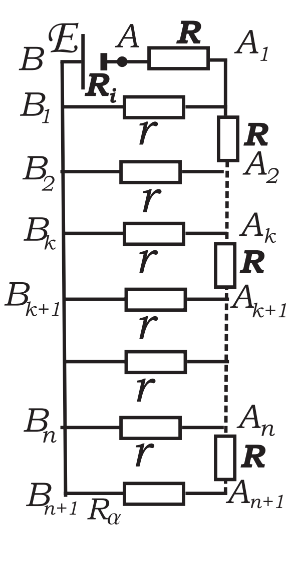
3.13. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами a, b заполнено проводящими материалами с проводимостями σ_1 и σ_2. К обкладкам приложена разность потенциалов U. Найти распределение плотности тока.



3.14. В цепь включены сопротивление R и элемент с сопротивлением, зависящим от падения напряжения V на нем по закону $r = r_0 - \alpha V$, где $\alpha,\ r_0$ — постоянные. Найти ток в цепи, если к ее концам подведено напряжение U.



3.15. Телеграфная линия подвешена на n изоляторах в точках A_1, $A_2, ..., A_n$ (роль второго провода играет земля). Отрезки линии AA_1, $A_1A_2, ..., A_na_{n+1}$ имеют одно и то же сопротивление R. Сопротивление утечки каждого изолятора равно. Батарея с эдс $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением R_i включена между землей и концом линии A. Другой конец линии A_{n+1} через нагрузку R_a закорочен на землю. Найти распределение тока в линии и ток нагрузки. Во сколько раз эдс батареи при изоляции с утечкой должна быть больше эдс при сухой изоляции $(r = 0)$, чтобы ток в обоих случаях был одинаков? Рассмотреть также случай $R_a = 0$.



3.16. Подземный кабель имеет постоянное сопротивление ρ на еди-

ницу длины. Проводимость утечки изоляции кабеля на единицу его длины постоянна и равна $1/\rho_0$. Роль обратного провода играет земля. Найти дифференциальное уравнение, описывающее распределение постоянного тока в кабеле. Найти связь между током в кабеле $J(x)$ и разностью потенциалов $\varphi(x)$ между жилой кабеля и землей.

3.17. К одному из концов подземного кабеля длины a сопротивлением единицы длины ρ и проводимостью утечки изоляции $1/\rho_0$ (на единицу длины) подключена заземленная одним полюсом батарея с эдс $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением R_i. Второй конец кабеля подсоединен к заземленной нагрузке R_a. Найти распределение тока $J(x)$ по кабелю. Рассмотреть также случай $R_i = R_a = 0$. Рассмотреть случай кабеля без утечки $(1/\rho_0 = 0)$.

3.18. Заземление осуществляется с помощью идеально проводящего шара радиуса a, на половину утопленного в землю (проводимость земли $\sigma_1 = \mathrm{const}$). Слой земли радиуса b, концентрический с шаром и прилегающий к нему, имеет искусственно повышенную проводимость σ_2. Найти сопротивление такого заземлителя.

3.19. Концы некоторой цепи заземлены с помощью двух идеально проводящих сфер (радиусы их a_1 и a_2), на половину утопленных в землю, служащей вторым проводом. Расстояние между этими сферами $\ell \gg a_1,\ a_2$, проводимость земли — σ. Найти сопротивление между заземлителями.

3.20. Конденсатор произвольной формы заполнен однородным диэлектриком с проницаемостью ε. Найти емкость этого конденсатора, если известно, что при заполнении его однородным проводником с проводимостью σ он оказывает постоянному току сопротивление R.

3.21. Оценить сопротивление заземления, выполненного в форме пластины с размерами $\ell \gg a \gg h$. Оценить напряженность электрического поля вокруг этого заземления, если заземление находится на глубине $r \gg \ell$. Найти «шаговое» напряжение (длина шага λ) вблизи этого заземления.

3.22. Найти коэффициент ослабления переменного с частотой ω электрического поля в металле с проводимостью σ.

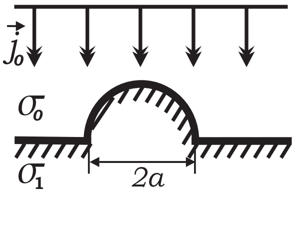
3.23. Пространство между обкладками сферического конденсатора с радиусами R_1 и R_2 заполнено проводящей средой с проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε. В начальный момент времени внутренней обкладке сообщили заряд q. Найти: а) зависимость от времени электрического поля во всем пространстве; б) полное количество выделившегося тепла.

3.24. В бесконечной среде с проводимостью σ, где шел ток с плотностью $\vec{j}_0$, всюду одинаковой, возникла сферическая полость радиуса R (внутри полости $\sigma = 0$). Найти результирующее распределение токов $\vec{j}(\vec{r})$.

3.25. В закипевшем жидком металлическом теплоносителе образовались сферические пузырьки почти непроводящего пара в количестве n штук в единице объема. Радиусы их практически одинаковы и равны a. Проводимость жидкого металла до образования пузырьков была σ_0. Найти усредненную проводимость σ закипевшего теплоносителя, пренебрегая влиянием пузырьков друг на друга $(na^3 \ll 1)$.

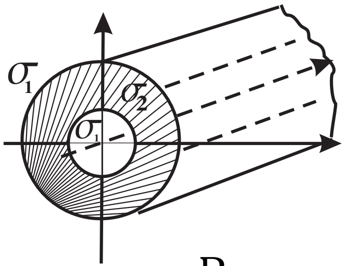
3.26. Во всем пространстве, заполненном средой с проводимостью σ_0, имелось однородное распределение плотности тока. В сферической области радиуса a проводимость изменилась на величину $\Delta\sigma$. Во сколько раз изменился после этого полный ток через максимальное сечение сферы, перпендикулярное первоначальному направлению вектора плотности тока?

3.27. Пространство между двумя плоскими электродами заполнено проводящей средой проводимости σ_0. Нижний электрод очень толстый, проводимость его металла равна $\sigma_1 \to \infty$. На этом электроде имеется очень небольшой полусферический выступ радиуса a. Из верхнего электрода в нижний идет ток, имеющий около этого электрода практически постоянную плотность тока $\vec{j}_0$. Найти



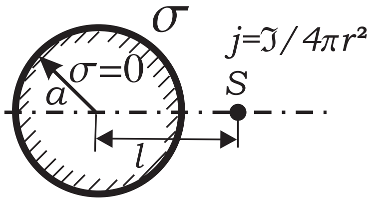
величину тока J, идущего через выступ.

3.28. Постоянный ток однородно с плотностью $\vec{j}_0$ распределён в пространстве, где проводимость среды равна σ_1. В это пространство внесен бесконечный полый цилиндр, ось которого Z перпендикулярна вектору $\vec{j}_0$. Проводимость вещества цилиндра σ_2. Внутри цилиндра в его полости среда имеет прежнюю проводимость σ_1. Внешний и внутренний радиусы цилиндра равны b и a. Во сколько раз изменится ток через область, занятую внутренней полостью цилиндра?



3.29. В верхнем полупространстве, заполненном средой с проводимостью σ_1, на расстоянии a от плоской границы находится точечный источник тока силы J_0. Проводимость среды в нижнем полупространстве σ_2. Найти распределение плотности тока $\vec{j}(x, y, z)$ во всем пространстве. В частности, рассмотреть случаи изолятора $(\sigma_2 = 0)$ и сверхпроводника $(\sigma_2 \to \infty)$.

3.30. В пространстве с постоянной проводимостью σ имеется сферическая область радиуса a, заполненная изолятором $(\sigma = 0)$. На расстоянии ℓ от ее центра находится точечный источник тока S (вблизи него плотность тока $j \simeq J/4\pi r^2$). Найти распределение плотности тока $j(\theta)$ у поверхности изолятора. Угол θ отсчитывать от линии, соединяющей центр сферы и точечный источник S.



3.31. Цилиндрический однородный пучок нерелятивистских электронов, сформированный электронной пушкой, катод которой имеет потенциал U, движется, не расплываясь, вдоль оси заземленной цилиндрической трубы радиуса b. Радиус пучка a. Найти кинетическую энергию электрона внутри пучка на расстоянии r от оси вдали от входа в трубу, если ток пучка J много меньше предельно возможного тока $J_{\text{пред}}$.

3.2. Закон «трех вторых»

3.32. Найти вольтамперную характеристику плоского диода (площадь электродов S, расстояние между ними d), катод которого неограниченно испускает электроны с нулевой начальной скоростью (закон "3/2"). Считать, что электрическое поле у катода отсутствует (внешнее поле самого диода компенсируется полем образовавшегося между электродами объемного заряда).

3.33. Обобщить закон "3/2"на область ультрарелятивистских энергий.

3.34. Оценить поправку к закону "3/2"за счет тепловых скоростей электронов на катоде.

3.35. Во сколько раз увеличится сила давления на анод в вакуумном плоском диоде (сила возникает из-за ударов электронов о поверхность анода), если напряжение на диоде увеличить в два раза?

3.36. В плоском диоде катод заземлён, а анодное напряжение равно U. Электроны (заряд $-$ $(-e)$, масса $-m$), идущие с катода, и ионы (заряд $-(+e)$, масса $-M$), идущие с анода, создают пространственный заряд. Скорости частиц при выходе из электродов можно считать нулевыми. Поле у катода равно нулю. Расстояние между электродами d. Какова напряженность электрического поля вблизи анода? Получить ограничение на ток ионов из найденного выражения для $E/x = d$ и указать связь между максимальным ионным током и электронным.

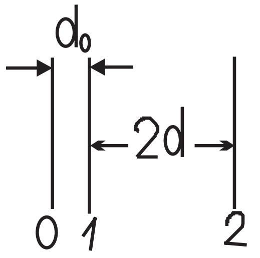
3.37. Между двумя параллельными проводящими плоскостями приложена разность потенциалов U, ускорявшая электроны, эмитируемые плоскостью нулевого потенциала. Ток эмиссии не ограничен. Зазор между плоскостями заполнен инертным газом, плотность которого такова, что электроны не набирают энергии, достаточной для ионизации. Найти вольтамперную характеристику такого диода.

3.38. Найти вольтамперную характеристику цилиндрического дио-

да с нулевым радиусом катода (радиус анода a).

3.39. Электронную «пушку» (диод) подключают к конденсатору ёмкости C, заряженному до напряжения U_0. Найти зависимость напряжения на конденсаторе $U(t)$ от времени, если ток «пушки» связан с напряжением на ней законом "3/2": $J = PU^{3/2}$.

3.40. Между плоскостями 1, 2, имеющими потенциалы U_1 и U_2,



проходит поток электронов, испускаемых плоскостью О с потенциалом $U = 0$. Найти максимальную плотность тока, поступающего на плоскость 2 при работе системы в режиме виртуального катода, если расстояние $d_0 \ll 2d$. Нарисовать ход потенциала между пластинами.

3.41. В вакуумном диоде (с зазором d), работающем в режиме закона "3/2", широкий электронный пучок (радиус $r \gg d$) ускоряется до релятивистских скоростей $v \sim c$. Ток пучка — J. Оценить, во сколько раз в случае широкого и короткого пучка сила кулоновского расталкивания в радиальном направлении меньше силы магнитного сжатия.

3.42. Оценить предельный ток широкого и короткого $(r \gg d)$ вакуумного диода (d — зазор диода, r — радиус электронного пучка в диоде).

3.43. Оценить потенциал объемного заряда релятивистского $(\gamma \gg 1)$ электронного пучка (радиус — a, ток — J), пролетающего в пространстве между двумя проводящими заземленными плоскостями, расстояние между которыми равно d $(d \ll a)$. Скорость электронов в пучке перпендикулярна плоскостям.

3.3. Решение типичных задач

Р.34. В бесконечную проводящую с проводимостью σ и проницаемостью ε среду помещен заряд Q_0. Найти время релаксации, т. е.

время, в течение которого заряд уменьшится в e раз.

Пусть в момент времени t внутри объема V, куда первоначально был помещен заряд Q_0, находится заряд $Q(t)$. За время dt из объема вытечет количество заряда

$$dQ = -\left(\int\limits_S (\vec{j}\, d\vec{s})\right) dt\,,$$

где $\int_S (\vec{j}\, d\vec{s})$ — полный ток через поверхность S, ограничивающий объем V; $\vec{j}$ — вектор плотности тока на этой поверхности. Используя дифференциальный закон Ома $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, находим, что

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\int\limits_S (\vec{D}\, d\vec{s}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\, 4\pi Q.$$

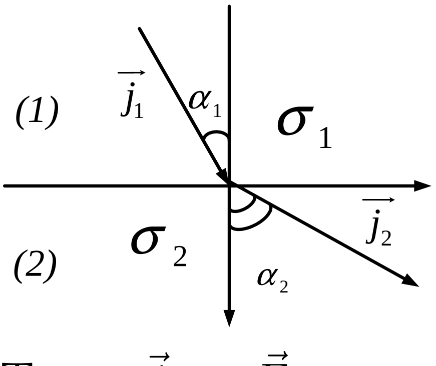
Решая это дифференциальное уравнение и используя начальное условие $Q(0) = Q_0$, получаем

$$Q = Q_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t} = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

откуда видно, что заряд уменьшается в e раз за время $\tau = \varepsilon/4\pi\sigma$.

Р.35. Найти закон преломления линий тока на плоской поверхности раздела двух сред с проводимостями σ_1 и σ_2.

В стационарном случае $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, откуда $j_{1n}| = j_{2n}|$. Нормальные составляющие к границе раздела двух сред непрерывны, иначе на границе будет изменяться заряд. С другой стороны, $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, откуда следует непрерывность тангенциальной составляющей напряженности электрического поля $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.



Так как $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, то

$$j_{1\tau} = \sigma_1 E_{1\tau}, \qquad j_{2\tau} = \sigma_2 E_{2\tau} = j_{1\tau}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Поскольку $j_{1\tau}/j_{1n} = \operatorname{tg}\alpha$ (см. рисунок), то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,.$$

Р.36. Из толстой длинной трубы с радиусами a и b, сделанной из материала с проводимостью σ, вырезана вдоль оси часть с угловым размерам α_0. К продольным плоскостям разреза подведено напряжение U. Найти распределение плотности тока $j(r)$ по сечению отрезка трубы и сопротивление единицы длины. Краевыми эффектами пренебречь.

В цилиндрической системе координат $j = j_\alpha$. Поскольку плотность тока j_α зависит только от r, то $E_\alpha = j_\alpha/\sigma$ зависит тоже только от r. Тогда через интеграл по дуге определенного радиуса разность потенциалов или напряжение запишется так:

$$U = \int\limits_0^{(2\pi-\alpha_0)r} (\vec{E}\,d\vec{r}) = E_\alpha(r)(2\pi-\alpha_0)r,$$

откуда

$$E_\alpha(r) = \frac{U}{(2\pi-\alpha_0)r}$$

и, следовательно,

$$j_\alpha(r) = \frac{U\sigma}{(2\pi-\alpha_0)r}\,.$$

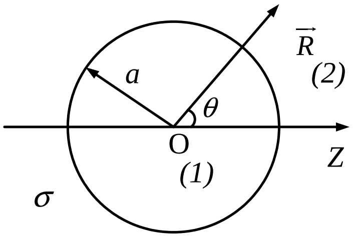
Найдем величину тока на единицу длины трубы:

$$J = \int\limits_a^b j_\alpha(r)\,dr = \frac{U\sigma\ln b/a}{2\pi-\alpha_0}\,.$$

Поскольку $J = U/R$, то из последнего выражения следует, что сопротивление единицы длины трубы:

$$R = \frac{2\pi-\alpha_0}{\sigma\ln b/a}\,.$$

Р.37. В бесконечной среде с проводимостью σ, где шел ток с плотностью $\vec{j}_0$, всюду одинаковой, возникла сферическая полость радиуса a (внутри полости $\sigma = 0$). Найти результирующее распределение токов $\vec{j}(\vec{R})$.



Распределение постоянных токов в проводящей среде описывается уравнением $\operatorname{div}\vec{j}(\vec{R}) = 0$, где $\vec{j}(\vec{R})$— объемная плотность тока. Так как $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ и $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то для распределения потенциала получается уравнение

$$\Delta\varphi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями на поверхности сферической полости:

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a);\ j_{1R}\Big|_{R=a}=j_{2R}\Big|_{R=a} \text{ или } \sigma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial R}\Big|_{R=a}=\sigma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\Big|_{R=a}. \tag{2}$$

Уравнение (1) и граничные условия (2) аналогичны таковым для электрической задачи: диэлектрический шар с проницаемостью ε_1 погружен в неограниченный диэлектрик с проницаемостью ε_2, если ε_1 заменить на σ_1, а ε_2 на σ_2. Поэтому, использовав решение задачи Р.22 и положив $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma$, получим для распределения потенциала и напряженности электрического поля следующие выражения:

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{3}{2}E_0 z & \text{при } R \le a \\ -E_0 z - \dfrac{(\vec{E}_0\vec{R})a^3}{2R^3} & \text{при } R \ge a \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{3}{2}\vec{E}_0 & \text{при } R < a \\ \vec{E}_0 + \dfrac{a^3\,\vec{E}_0}{2R^3} - \dfrac{3a^3(\vec{E}_0\vec{R})\vec{R}}{2R^5} & \text{при } R > a, \end{cases}$$

где $\vec{E}_0 = \vec{j}_0/\sigma$ — напряженность электрическога поля вдали от по-

лости. Поскольку $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, то распределение тока

$$\vec{j} = \begin{cases} \vec{j}_0\left(1 + \dfrac{a^3}{2R^3}\right) - \dfrac{3a^3\,(\vec{j}_0\vec{R})\vec{R}}{2R^5} & \text{при } R > a \\ 0 & \text{при } R < a. \end{cases}$$

Р.38. В закипевшем жидком металлическом теплоносителе образовались сферические пузырьки почти непроводящего пара в количестве n штук в единице объема. Радиусы их практически одинаковы и равны a. Проводимость жидкого металла до образования пузырьков была σ_0. Найти усредненную проводимость σ закипевшего теплоносителя, пренебрегая влиянием пузырьков друг на друга ($na^3 \ll 1$).

Если в среде образовались мелкие пузырьки, то можно рассматривать поле, усредненное по объемам, большим по сравнению с масштабами неоднородностей. По отношению к такому среднему полю смесь жидкого теплоносителя и пузырьков непроводящего пара является однородной и может характеризоваться некоторой средней проводимостью. Если $\overline{\vec{j}}$ и $\overline{\vec{E}}$ — усредненные по объему плотность тока и напряженность электрического поля, то

$$\overline{\vec{j}} = \sigma\overline{\vec{E}}\,, \qquad (1)$$

где σ и есть некоторая усредненная эффективная проводимость закипевшего теплоносителя. Вычислим среднее значение от $\vec{j} - \sigma_0\vec{E}$, по большому объему V. С одной стороны,

$$\frac{1}{V}\int\limits_V (\vec{j} - \sigma_0\vec{E})\,dv = \overline{\vec{j}} - \sigma_0\overline{\vec{E}}\,. \qquad (2)$$

С другой стороны, подынтегральное выражение отлично от нуля только внутри объемов пузырьков и с учетом того, что $\vec{j} = 0$ внутри каж-

дого пузырька, получаем

$$\frac{1}{V}\int\limits_V (\vec{j} - \sigma_0\vec{E})\,dv = -2\pi n a^3 \sigma_0 \overline{\vec{E}}\,. \tag{3}$$

Здесь использовано, что внутри сфер поле равно (см. Р.37) $3\overline{\vec{E}}/2$, т. е. что пузырьки находятся во внешнем поле, равном среднему. Приравнивая правые части формул (2) и (3) с учетом уравнения (1), окончательно получаем

$$\sigma = \sigma_0(1 - 2\pi n a^3) \qquad \text{при} \qquad n a^3 \ll 1\,.$$

Р.39. В неоднородной проводящей среде с проводимостью $\sigma(\vec{r})$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\vec{r})$ поддерживается стационарное распределение токов $\vec{j}(\vec{r})$. Найти объемное распределение зарядов $\rho(\vec{r})$ в этой среде.

По закону Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

По закону сохранения заряда в стационарном случае $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, т. е.

$$\operatorname{div}(\sigma\vec{E}) = \sigma\operatorname{div}\vec{E} + \vec{E}\operatorname{grad}\sigma = 0;$$

откуда

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\vec{E}(\operatorname{grad}\sigma)/\sigma. \tag{1}$$

По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho$; откуда

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \frac{1}{4\pi}(\vec{E}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon + \varepsilon\operatorname{div}\vec{E}).$$

Взяв $\operatorname{div}\vec{E}$ из (1), получим

$$\rho = \frac{\vec{E}}{4\pi\sigma}(\sigma\operatorname{grad}\varepsilon - \varepsilon\operatorname{grad}\sigma) = \frac{\vec{j}}{4\pi\sigma^2}(\sigma\operatorname{grad}\varepsilon - \varepsilon\operatorname{grad}\sigma).$$

Отметим, что $\rho \equiv 0$ при $\frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\operatorname{grad}\sigma}{\sigma}$.

В отсутствие поляризуемости среды, когда ее свойства описываются лишь через проводимость $\sigma(\vec{r})$, получаем

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{(\vec{j}\cdot\operatorname{grad}\sigma)}{4\pi\sigma^2}$$

при $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

Р.40. Найти вольт-амперную характеристику (связь между током J и напряжением U) для плоского диода. Площадь электродов S, расстояние между ними d. Катод неограниченно испускает электроны (заряд — e, масса — m) с нулевой начальной скоростью (закон "3/2"). Считать, что электрическое поле у катода полностью компенсируется полем образовавшегося между электродами объемного заряда электронного облака.

Запишем уравнение Пуассона для координаты x, отсчитываемой от катода (заземленного электрода): $\triangle\varphi(x) = -4\pi\rho$, $\rho = j/v$. Из закона сохранения энергии $mv^2/2 = e\varphi(x)$, откуда $v(x) = \sqrt{2e/m\cdot\varphi(x)}$.

Таким образом, имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{2e}\frac{J}{S}}\varphi^{-1/2} \equiv A\varphi^{-1/2}$$

где $A = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{e}\frac{J}{S}}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(d) = U$, $(d\varphi/dx)_{x=0} = 0$.

Представим уравнение в виде

$$dx\cdot\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2} = A\varphi^{-1/2}d\varphi = \frac{1}{2}d\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2$$

и проинтегрируем его, домножив обе части на 2:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 2A\int\varphi^{-1/2}d\varphi = 4A\varphi^{1/2} + C_1,$$

$C_1 = 0$ из граничных условий $\varphi(0) = 0$ и $E(0) = 0$.

Тогда

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\sqrt{A}\varphi^{1/4}.$$

Интергируем еще раз:

$$2\sqrt{A}x = \int \varphi^{-1/4} d\varphi = \frac{4}{3}\varphi^{3/4} + C_2. \quad C_2 = 0 \ \text{ при } \ \varphi(0) = 0.$$

Так как $\varphi(d) = U$, то

$$2\sqrt{A}d = \frac{4}{3}U^{3/4}, \quad \text{откуда} \quad \frac{9}{4}Ad^2 = U^{3/2}.$$

Подставляя

$$A = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{e}} \cdot \frac{J}{S},$$

имеем

$$\frac{9}{4} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{2m}{e}} \cdot \frac{Jd^2}{S} = U^{3/2},$$

т. е.

$$J = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{S}{d^2} \cdot U^{3/2}.$$

Р.41. Найти вольт-амперную характеристику цилиндрического диода (радиус анода — a, радиус катода мал). Краевыми эффектами пренебречь. Длина диода — l.

Решим задачу иным нежели предыдущую способом.

Уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат записывается так:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\varphi(R)}{dR}\right) = -4\pi\rho(R) = \frac{4\pi J}{2\pi Re}\sqrt{\frac{m}{2e}}\varphi^{-1/2}(R),$$

т. е.

$$\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\varphi}{dR}\right) = \frac{J}{l}\sqrt{\frac{2m}{e}}\varphi^{-1/2} = A\varphi^{-1/2}; \ \ \varphi(0) = 0; \quad \varphi(a) = U.$$

Ищем решение в виде $\varphi(R) = CR^{\alpha}$.

Подставляем в уравнение и получаем

$$C\alpha(\alpha-1)R^{\alpha-1} = AC^{-1/2}R^{-\alpha/2}.$$

Степени R должны быть одинаковы: $\alpha - 1 = -\alpha/2$, откуда $\alpha = \frac{2}{3}$.

Подставляя $\alpha = \frac{2}{3}$ в предыдущее уравнение и сокращая на $R^{2/3}$, получаем уравнение для C:

$$\frac{9}{4}C = AC^{-1/2},$$

откуда

$$C = \left(\frac{4A}{9}\right)^{2/3}.$$

Таким образом,

$$\varphi(R) = \left(\frac{4A}{9}\right)^{2/3},$$

откуда

$$U = \frac{4aA}{9}, \quad J = \frac{2\sqrt{2}}{9}\cdot\frac{l}{a}\sqrt{\frac{e}{m}}U^{3/2}.$$

Р.42. Между параллельными плоскими электродами 1 и 2, имеющими потенциалы U_1 и U_2, проходит поток электронов, испускаемых катодом O с потенциалом $U = 0$. Найти максимальную плотность тока j_2, поступающего на анод 2 при работе системы в режиме виртуального катода. Расстояние d_0 между электродами 0 и 1 много меньше интервала $2d$ между электродами 1 и 2.

На каком расстоянии x_m от плоскости 1 при этом находится виртуальный катод $(U(x_m) = 0)$?

При прохождении потока электронов между электродами 1 и 2 с потенциалами U_1 и U_2 из-за образования объемного заряда происходит "провисание"потенциала $U(x)$ вплоть до зануления в плоскости, находящейся на расстоянии x_m от электрода 1. (Так как $d_0 << 2d$ по

условию, то и на расстоянии x_m от реального катода 0). В этой плоскости скорости электронов обращаются в нуль и часть электронов поворачивает обратно к электроду 1. Такое «провисание» потенциала до нулевого значения называется образованием виртуального катода 3.

Теперь от электрода 1 идет ток с плотностью j_1, от виртуального катода 3 в обратном направлении идет отраженный ток $-j_3$ и к электроду 2 приходит ток с плотностью j_2: $j_2 = j_1 - j_3$.

Отсюда максимальный ток на аноде 2 j_{2max} получается в режиме возникновения виртуального катода, если отраженный ток j_3 обращается в нуль, т. е.

$$j_{2max} = j_1, \quad \text{при} \quad j_3 = 0. \tag{1}$$

Заметим, что режим виртуального катода соответствует при этом тому, что образовались как бы два диода с общим катодом, которые включены навстречу друг другу.

У одного анодное напряжение U_1, у другого U_2. В плоском диоде с расстоянием между электродами $2d$ и напряжением на аноде U_2 вольт-амперная характеристика выглядит так (см. задачу 40):

$$j_0 = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m}}\frac{U_2^{3/2}}{(2d^2}. \tag{2}$$

Тогда

$$j_2 = \frac{AU_2^{3/2}}{(2d - x_m)^2}, \quad j_1 = \frac{AU_1^{3/2}}{x_m^2} = j_0\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2\frac{(2d)^2}{x_m^2}. \tag{3}$$

Введем безразмерные параметры:

$$k = (U_1/U_2)^{1/2} \quad \text{и} \quad l = x_m/2d, \quad l < 1.$$

Подставляя j_1 и j_2 из уравнения (3) в уравнение (1) и сокращая на j_0, получаем $1/(1-l)^2 = k^3/l^2$, откуда для l следует квадратное уравнение: $l^2 = k^3 - 2k^3 l + k^3 l^2$.

Записываем уравнение в стандартной форме:

$$(k^3 - 1)l^2 - 2k^3 l + k^3 = 0$$

и получаем решение

$$l_{1,2} = \frac{k^3 \pm \sqrt{k^6 - k^6 + k^3}}{k^3 - 1} = \frac{k^3 \pm k^{3/2}}{k^3 - 1}.$$

Оставляем лишь один корень, отвечающий условию $l < 1$.

$$l = \frac{k^3 - k^{3/2}}{k^3 - 1} = \frac{k^{3/2}(k^{3/2} - 1)}{(k^{3/2})^2 - 1} = \frac{k^{3/2}}{k^{3/2} + 1} = \frac{1}{1 - k^{-3/2}},$$

т. е.

$$\frac{x_m}{2d} = \frac{1}{1 + (U_2/U_1)^{3/4}}.$$

Таким образом,

$$x_m = \frac{2d}{1 + (U_2/U_1)^{3/4}},$$

$$j_{2max} = \frac{AU_2^{3/2}}{(2d - x_m)^2} = \frac{AU_2^{3/2}}{4d^2(1-l)^2} = \frac{AU_2^{3/2}}{4d^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{(U_2/U_1)^{3/4}}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{A}{4d^2}\left(U_1^{3/4} + U_2^{3/4}\right)^2.$$

$$j_{2max} = \frac{\sqrt{2}}{9\pi \cdot (2d)^2} \cdot \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \left(U_1^{3/4} + U_2^{3/4}\right)^2.$$

4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

Закон Ампера ($\mu = 1$):

$$d\vec{F}_{12} = \frac{J_1 J_2 \left[d\vec{l}_1 \times \left[d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12}\right]\right]}{c^2 r_{12}^3} = \frac{\left[\vec{j}_2 \times \left[\vec{j}_1 \times \vec{r}_{12}\right]\right] dV_1 dV_2}{c^2 r_{12}^3} =$$

$$= \frac{\left[\vec{v}_2 \times \left[\vec{v}_1 \times \vec{r}_{12}\right]\right] dq_1 dq_2}{c^2 r_{12}^3}.$$

Сила Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{J\left[d\vec{l}\times\vec{B}\right]}{c} = \frac{\left[\vec{j}\times\vec{B}\right]dV}{c} = \frac{\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]dq}{c}$$

Закон Био—Савара ($\mu = 1, \vec{B} = \vec{H}$):

$$d\vec{H} = \frac{J\left[d\vec{l}\times\vec{r}\right]}{cr^3} = \frac{\left[\vec{j}\times\vec{r}\right]dV}{cr^3} = \frac{[\vec{v}\times\vec{r}]}{cr^3}dq$$

$\vec{B}$[Тл] $= 10^4\vec{B}$[Гс], $\vec{H}$[А/м] $= 1,26\cdot 10^{-2}\vec{H}$[Э].

В вакууме ($\mu = 1$) для постоянных токов уравнения Максвела имеют вид

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,\ \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j},\ \vec{B} = \vec{H}.$$

В интегральной форме:

$$\oiint B_n dS = 0,\ \oint B_l dl = \frac{4\pi}{c}\iint j_n dS.$$

Граничные условия:

$$B_{1n}| = B_{2n}|,\ \vec{H}_{1\tau}| - \vec{H}_{2\tau}| = \frac{4\pi}{c}\left[\vec{I}_{\text{пов}}\times\vec{n}_{21}\right].$$

Скалярный магнитный потенциал φ_m для областей, где $\vec{j}\equiv 0$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\varphi_m = 0,\ \ \varphi_{1m}| = \varphi_{2m}|\,,\ \mu_1\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right| = \mu_2\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|.$$

Векторный магнитный потенциал $\vec{A}$ ($\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$) удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}, \quad \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu}{c}\frac{\vec{j}}{r}dV = \frac{\mu}{c}J\frac{d\vec{l}}{r} = \mu\frac{\vec{v}dq}{cr} = \frac{\varepsilon\mu\vec{v}}{c}d\varphi.$$

$$\vec{A}_{\text{точ}} = \frac{[\vec{m}\times\vec{r}]}{r^3}, \quad \text{где} \quad \vec{m} = \frac{1}{2c}\int\left[\vec{r}\times\vec{j}\right]dV.$$

Магнитный момент маленького витка с током $\vec{m} = \frac{JS}{c}\vec{n}$.
Сила, действующая на магнитный диполь

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m}\vec{H}), \quad \vec{N} = [\vec{m}\times\vec{H}].$$

4.1. Закон Био—Савара. Теорема Стокса. Суперпозиция полей

4.1. Найти поле на оси и в центре кругового витка радиуса a с током J. Используя полученный результат, найти: а) поле на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны под углами α_1, α_2; б) поле на конце полубесконечного соленоида; в) поле внутри бесконечного соленоида. Число витков на единицу длины соленоидов n.

4.2. Найти величину магнитного поля на оси равномерно заряженного диска радиуса a (полный заряд диска равен Q), вращающегося вокруг оси с угловой скоростью ω на расстоянии h от диска.

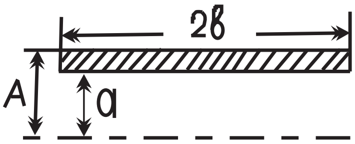
4.3. а) На шар радиуса R плотно намотана проволока так, что плоскости витков параллельны, витки плотно прилегают друг к другу. Число витков N. По проволоке пустили ток J. Найти магнитное поле в центре шара.

б) Найти магнитное поле в центре вращающейся с угловой скоростью ω равномерно заряженной зарядом Q сферы.

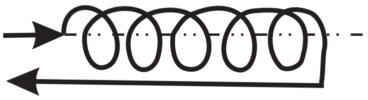
4.4. Определить магнитное поле, создаваемое двумя параллельными плоскостями, по которым текут токи с одинаковыми поверхностными плотностями $i = \text{const}$. Рассмотреть случаи: а) токи текут в противоположных направлениях; б) токи направлены одинаково.

4.5. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный с ней сплошной провод радиуса a. По этим проводникам текут постоянные одинаковые токи J в противоположных направлениях. Определить магнитное поле во всем пространстве. Сравнить его с полем прямого тока.

4.6. Найти поле в центре реального соленоида как функцию его «геометрии»: $H = H_0(W, \alpha, \beta)$, где W — потребляемая мощность, а $\alpha = A/a$, $\beta = b/a$ — геометрические параметры соленоида. При каких α и β поле H_0 максимально при заданном W?

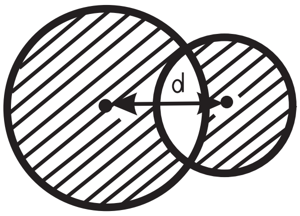


4.7. Оценить угол наклона силовой линии магнитного поля к оси соленоида длины ℓ радиуса $a \ll \ell$, с числом витков $N \gg 1$ и током J при учете обратного токопровода, почти примыкающего к соленоиду (зазор $\Delta \ll a$).



4.8. Определить магнитное поле в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном цилиндрическом проводнике. Радиусы полости и проводника — соответственно a и b, расстояние между их параллельными осями — d $(b > a + d)$. Ток J равномерно распределен по всему сечению.

4.9. По двум прямолинейным изолированным друг от друга проводникам, сделанным из немагнитного материала, текут в противоположные стороны токи с одной и той же плотностью j. Проводники имеют пересекающиеся круговые сечения. Найти магнитное поле в полости, если расстояние между осями проводников d.



4.10. Найти поле соленоида, свернутого в тор. Число витков — N, ток — J, размеры тора заданы. Сравнить результат с полем внутри бесконечного соленоида с той же плотностью намотки и тем же током J.

4.11. Прямолинейная, бесконечно длинная полоса имеет ширину a.

Вдоль полосы течет ток J, равномерно распределенный по ее ширине. Найти магнитное поле. Рассмотреть предельный случай поля на больших расстояниях.

4.12. В бесконечную проводящую плоскость упирается перпендикулярно к ней линейный полубесконечный проводник с током J. Найти напряженность магнитного поля на расстоянии r от проводника над и под плоскостью на расстоянии z от нее. Чему равно поле только полубесконечного проводника с током?

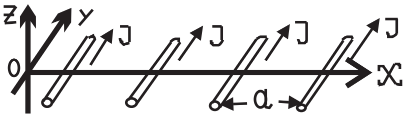
4.13. Вертикальный провод с током J оканчивается в земле с проводимостью σ полусферическим заземлителем радиуса a. Считая проводимость $\sigma = \text{const}$ и предполагая, что второй электрод находится на расстоянии, много большем a, найти магнитное поле в земле и в воздухе.

4.14. Найти положение границ и оценить объем однородного с точностью до $\Delta H/H$=0,01 магнитного поля, создаваемого током J, идущим в витках радиуса $R = 10$ см. Отрезок $O_1O_2 = R$, соединяющий центры витков, перпендикулярен их плоскостям.

4.2. Векторный потенциал, магнитный диполь. Силы действующие на магнитный диполь. Прецессия магнитного момента

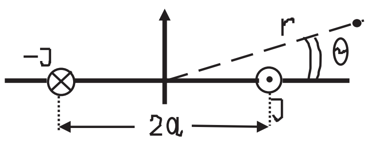
4.15. Вычислить векторный потенциал: 1) однородного поля в координатах: а) декартовых, б) цилиндрических, в) сферических; 2) поля прямого тока; 3) поля кругового витка на больших расстояниях от витка.

4.16. Найти векторный потенциал и магнитное поле, создаваемое двумя прямолинейными параллельными токами J, текущими в противоположных направлениях. Расстояние между токами $2a$.

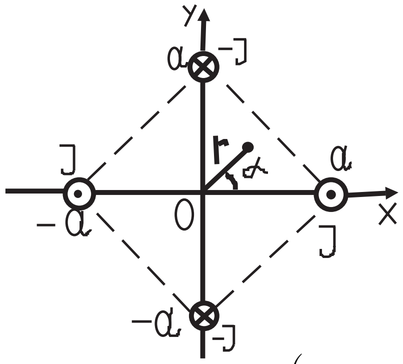


4.17. Найти поле вдали от плоской периодической решетки параллельных проводников.

4.18. Два бесконечных прямолинейных тока J текут в противоположных направлениях. Найти первый неисчезающий член разложения для расстояний $r \gg a$: а) векторного потенциала; б) магнитного поля. Токи параллельны оси Z.

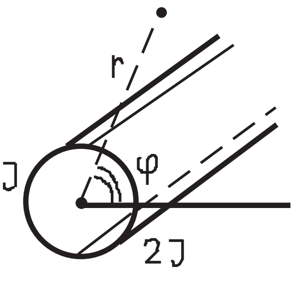


4.19. Четыре параллельных прямых провода расположены в вершинах квадрата с диагональю $2a$. По проводам идут одинаковые по величине постоянные токи чередующегося направления $(J, -J, J, -J)$. Найти приближенные выражения для магнитного поля $\vec{H}(x, y)$ и векторного потенциала $\vec{A}(x, y)$ вблизи оси симметрии системы $(r = \sqrt{x^2 + y^2} \ll a)$.



4.20. Вдоль оси проводника толщиной δ, изогнутого в форме полуцилиндра радиуса a $(a \gg \delta)$, течет ток с постоянной плотностью $\vec{j}$. Найти векторный потенциал на плоскости, расположенной вдоль оси полуцилиндра и опирающейся на его края.

4.21. По поверхности бесконечно длинного цилиндра радиуса a идет суммарный ток $3J$, причем ток на одной половине цилиндра равен $2J$, на другой — J. Найти магнитное поле на большом расстоянии $r \gg a$ от цилиндра с точностью до первой степени отношения a/r.



4.22. Найти магнитный момент однородно заряженного шара (сферы), вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью ω. Заряд шара — e, радиус — a.

4.23. Шар (сфера) радиуса a заряжен зарядом q равномерно по объему (поверхности) и вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью ω. Найти магнитное поле внутри и вне шара (сферы); выразить его напряженность через магнитный момент шара (сферы) $\vec{m}$.

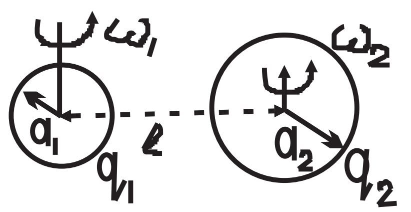
4.24. Найти магнитное поле полубесконечного соленоида на расстоянии r от его торца $(r \gg \sqrt{S})$ под углом θ к его оси. Ток в соленоиде — J, число витков на единицу длины — n, сечение — S.

4.25. Найти силу и вращательный момент, действующие на замкнутый тонкий проводник с током в однородном магнитном поле. Форма контура, образованного проводником, произвольна. Выразить результат через магнитный момент.

4.26. Найти потенциальную функцию двух малых токов, магнитные моменты которых $\vec{m}_1$ и $\vec{m}_2$. Определить силу взаимодействия этих токов и приложенные к ним вращательные моменты. Рассмотреть частный случай $\vec{m}_1 \parallel \vec{m}_2$.

4.27. Показать, что силы, действующие между малыми токами, стремятся установить магнитные моменты этих токов параллельно друг другу и линии, соединяющей центры.

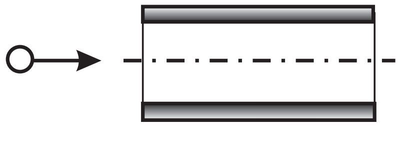
4.28. Два равномерно заряженных шарика с зарядами q_1, q_2 и радиусами a_1, a_2 вращаются без поступательного движения с угловыми скоростями ω_1, ω_2 так, что векторы $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ перпендикулярны отрезку $\vec{\ell}$, соединяющему центры шаров $(\ell \gg a_1, a_2)$. Оценить силу взаимодействия шариков.



4.29. На какой высоте над сверхпроводящим полупространством расположится круговой виток из сверхпроводника? Вес витка — P, радиус — R, ток в витке — J. Рассмотреть случаи: а) $h \gg R$; б) $h \ll R$. Плоскость витка параллельна границе сверхпроводника.

4.30. Найти силу, действующую на диполь в слабо неоднородном магнитном поле.

4.31. Какую скорость нужно сообщить идеально проводящему шарику радиуса $a = 1$ см, массы $m = 40$ г, чтобы он мог влететь с большого расстояния по оси симметрии внутрь изображенного на рисунке соленоида радиуса $R = 10$ см, име-



ющего внутри поле $B_0 = 10^5$ Гс.

4.32. Перпендикулярно магнитному полю $\vec{B}$ с равными скоростями $\vec{v}$ движутся два диэлектрических одинаковых шарика (радиус — a и проницаемость — ε). Расстояние между центрами шариков $\ell \gg a$. Найти силу взаимодействия шариков $(\vec{v} \perp \vec{\ell})$.

4.33. Найти магнитный момент, создаваемый заряженной частицей, двигающейся по окружности в однородном магнитном поле, и отношение этого момента к моменту импульса частицы (гиромагнитное отношение). Масса частицы — m, заряда — e.

4.34. Частица массы m и зарядом e вращается в магнитном поле $\vec{H}$ со скоростью $(\vec{v} \perp \vec{H})$. Собственные механический и магнитный моменты частицы равны $\vec{s}$ и $\vec{m}$ соответственно, причем $\vec{s} = g\vec{m}$. Показать, что в лабораторной системе координат угол α между векторами $\vec{s}$ и $\vec{v}$ меняется по закону $d\alpha/dt = (g/2g_0 - 1)eH/mc$; при $t = 0$ $\vec{v} \parallel \vec{s}$. $g_0 = e/2mc$.

4.35. Докажите, что с помощью вращающейся катушки, намотанной на поверхности сферы с плотностью витков, пропорциональной $\sin\theta$, где θ — полярный угол, измеряется аксиальная компонента поля в ее центре независимо от степени неоднородности поля.

4.3. Решение типичных задач

Р.43. Найти поле на оси и в центре кругового витка радиуса a с током J. Используя полученный результат, найти:

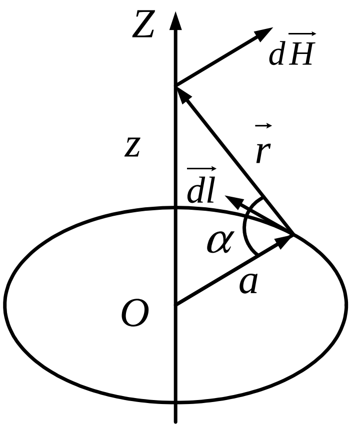
а) поле на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны под углами α_1 и α_2;

б) поле на конце полубесконечного соленоида;

в) поле внутри бесконечного соленоида.

Число витков на единицу длины соленоида n.

По закону Био—Савара напряженность магнитного поля $d\vec{H}$, со-



здаваемая элементом тока $J\,d\vec{l}$,

$$d\vec{H} = \frac{J}{cr^3}[\,d\vec{l} \times \vec{r}\,]\,, \qquad (1)$$

где r — расстояние от элемента тока до точки наблюдения. По принципу суперпозиции полное поле в данной точке можно получить интегрированием (1) по всему кольцу. Замечаем, что на оси витка

$$\vec{H} = \oint d\vec{H} = \vec{e}_z \oint dH_z,$$

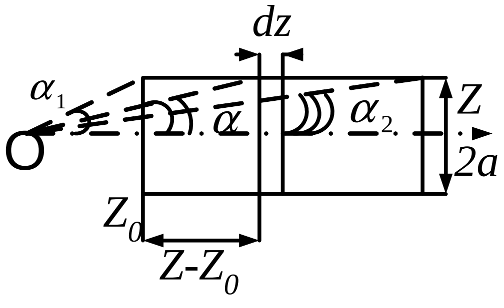
где $\vec{e}_z$ — единичный вектор в направлении оси Z. Интегрируя по кольцу z-ю проекцию напряженности магнитного поля dH_z, находим

$$H_z = \oint dH_z = \frac{J\cos\alpha}{cr^2}\oint dl = \frac{2\pi a J\cos\alpha}{cr^2} = \frac{2\pi J}{c}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (2)$$

Используя уравнение (2), получаем, что поле в центре витка

$$H_z\Big|_{z=0} = \frac{2\pi J}{ca}\,.$$

а) Найдем поле на оси круглого соленоида в точке, из которой его края видны под углами α_1 и α_2. Используя уравнение (2), запишем поле, создаваемое в точке $z = 0$ током соленоида, текущим по $n\,dz$ виткам, расположенным на расстоянии z от начала координат



$$dH_z = \frac{2\pi J}{c}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,n\,dz\,.$$

Интегрируя но всей длине соленоида, получаем полное поле, созда-

ваемое соленоидом в точке $z = 0$:

$$H_z = \frac{2\pi Jna}{c} \int\limits_{z_0}^{z_0+l} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}},$$

где l — длина соленоида. Перейдем от интегрирования по z к интегрированию по углу α, используя формулы

$$z = a \operatorname{ctg} \alpha, \qquad dz = -\frac{a\,d\alpha}{\sin^2 \alpha}, \qquad \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Тогда

$$H_z = -\frac{2\pi nJ}{c} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{2\pi nJ}{c} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \qquad (3)$$

б) Если положить $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$, то из уравнения (3) получим напряженность магнитного поля на конце полубесконечного соленоида

$$H_z = \frac{2\pi Jn}{c}.$$

в) При $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$ формула (3) дает поле внутри бесконечного соленоида

$$H_z = \frac{4\pi Jn}{c}.$$

Р.44. Вычислить векторный потенциал:

1) однородного поля в координатах: а) декартовых, б) цилиндрических, в) сферических;

2) поля прямого тока;

3) поля кругового витка на больших расстояниях от витка.

Векторный потенциал $\vec{A}$ магнитного поля $\vec{B}$ определяется соотношением

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \qquad (1)$$

и дополнительным условием

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0\,. \tag{2}$$

В тех областях, где магнетик однороден, вектор $\vec{A}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\,\vec{j}\,, \tag{3}$$

где $\vec{j}$ — заданное распределение токов. Решение уравнения (3) можно записать в виде интеграла по объему

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{\mu}{c}\int\frac{\vec{j}(\vec{R}\,')\,dV'}{|\vec{R}-\vec{R}|}\,, \tag{4}$$

где $\vec{R}'$ — вектор положения элемента тока $\vec{j}(\vec{R}\,')\,dV'$ в выбранной системе координат.

1a) Пусть $\vec{B}$ направлено по оси Z. Положим $A_z = 0$, поскольку циркуляция вектора $\vec{A}$ максимальна в плоскости (X,Y). Векторное уравнение (1) равносильно трем скалярным уравнениям, которые с учетом $A_z = 0$ запишутся в виде

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z\,,$$
$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0\,, \tag{5}$$
$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = 0\,.$$

Решение этой системы не однозначно. Из двух последних уравнений следует, что A_y и A_x могут быть только функциями от x и y и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0\,. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) можно выбрать, например,

$$A_y = 0, \qquad A_x = A_1(y).$$

Подставляя их в уравнение (5), находим

$$A_x = B_z \cdot y.$$

Более симметричное решение уравнения (6) имеет вид

$$A_x = b \cdot x + A_1(y)\,,$$

$$A_y = -b \cdot y + A_2(x)\,,$$

где b — произвольная постоянная. Подставляя это решение в уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial A_2(x)}{\partial x} - \frac{\partial A_1(y)}{\partial y} = B_z = \text{const}\ .$$

Откуда

$$A_1(y) = -\frac{1}{2}B_z \cdot y\,, \qquad A_2(x) = \frac{1}{2}B_z \cdot x\,.$$

Выбирая $b = 0$, окончательно находим

$$A_x = -\frac{1}{2}B_z \cdot y\,, \qquad A_y = \frac{1}{2}B_z \cdot x\,, \quad A_z = 0\,.$$

1б) В цилиндрической системе координат (z, r, α) уравнение (1) будет равносильно уравнениям

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \alpha} = B_z\,,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = 0\,,$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0\,.$$

Полагая $A_z = 0$, как и в декартовой системе координат, уравнения принимают вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \alpha} = B_z\,,$$

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial z} = 0\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} = 0\,.$$

Выбирая $A_r = 0$, из уравнения (7) находим

$$A_\alpha = \frac{1}{2} B_\alpha r.$$

1в) В сферической системе координат (R,θ,α) проекциями вектора $\vec{B}$ будут

$$B_R = B\cos\theta\,, \qquad B_\theta = -B\sin\theta\,, \qquad B_\alpha = 0\,.$$

Выбираем вектор $\vec{A}$ (как и в предыдущих случаях) лежащим в плоскостях, перпендикулярных $\vec{B}$. Тогда у $\vec{A}$ существует только отличная от нуля проекция A_α. Полагая $A_R = A_\theta = 0$, скалярные уравнения, соответствующие векторному уравнению (1), будут иметь вид

$$\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_\alpha) = B\cos\theta\,, \tag{8}$$

$$\frac{A_\alpha}{R} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial R} = B\sin\theta\,. \tag{9}$$

Интегрируя уравнение (8), получаем

$$A_\alpha = \frac{1}{2} BR\sin\theta + f(R)\,,$$

где $f(R)$ — произвольная функция от R. Из симметрии задачи следует, что A_α не зависит от α. Подставляя A_α в уравнение (9), получаем $\partial f(R)/\partial R = 0$, значит, $f(R)$ можно выбрать равным нулю, $f(R) = 0$. Окончательно

$$A_R = A_\theta = 0\,, \qquad A_\alpha = \frac{1}{2} BR\sin\theta\,.$$

2) Будем решать задачу в цилиндрической системе координат. Пусть ток J течет вдоль оси Z . Тогда из уравнения (3) следует, что

векторный потенциал можно выбрать направленным тоже по Z. Напряженность магнитного поля прямого тока имеет только α-ю компоненту: $H_\alpha = 2J/cr$. Запишем проекцию векторного уравнения (1) на α-е направление:

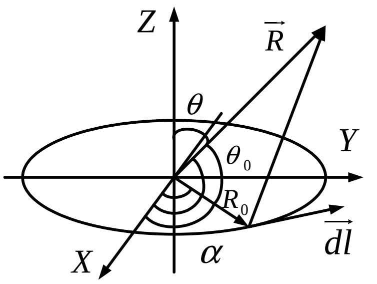
$$\frac{2J}{cr} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\,. \tag{10}$$

Здесь положено $\mu = 1$. Интегрируя уравнение (10), получаем

$$A_z = -\frac{2J}{c}\ln r + \mathrm{const}\ .$$

Константа произвольна. Можно приписать точкам произвольной цилиндрической поверхности, соосной с током, нулевой векторный потенциал.

3) Кольцо с током радиуса R_0 расположено в плоскости (X, Y).



Найдем векторный потенциал в точке наблюдения, задаваемой радиус-вектором $\vec{R}$. Для линейного тока выражение (4) запишется так:

$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{J}{c}\oint \frac{d\vec{l}}{|\vec{R}-\vec{R}_0|}\,. \tag{11}$$

Направим ось X перпендикулярно плоскости, в которой лежат Z и $\vec{R}$ (см. рисунок). На больших расстояниях подынтегральное выражение (11) можно представить так:

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{R}_0|} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{(\vec{R}\,\vec{R}_0)}{R^2}\right) \qquad \text{при} \qquad \frac{R_0}{R} \ll 1\,.$$

Тогда

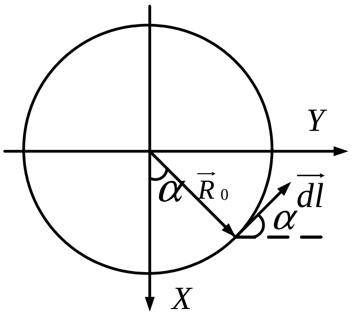
$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{J}{cR}\left[\oint d\vec{l} + \frac{1}{R^2}\oint (\vec{R}\,\vec{R}_0)\,d\vec{l}\right]. \tag{12}$$

Первый интеграл равен нулю. Подынтегральное выражение второго интеграла представим в виде

$$(\vec{R}\,\vec{R}_0)d\vec{l} = RR_0^2\,\cos\theta_0(-\vec{n}_x\sin\alpha + \vec{n}_y\cos\alpha)\,d\alpha =$$

$$= RR_0^2 \sin\theta \, \sin\alpha \, (-\vec{n}_x \sin\alpha + \vec{n}_y \cos\alpha) \, d\alpha \, , \qquad (13)$$

где $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$— единичные векторы в направлении осей X, Y. При



преобразовании использованы равенства

$$d\vec{l} = (-\vec{n}_x \sin\alpha + \vec{n}_y \cos\alpha) R_0 \, d\alpha \, ,$$

$$cos\theta_0 = \sin\theta \sin\alpha \, .$$

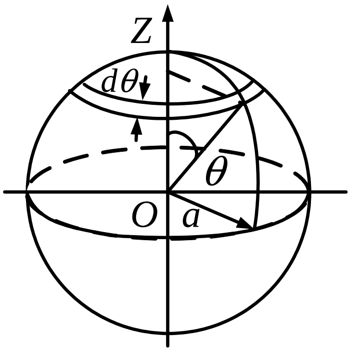
Подставляя выражение (13) в уравнение (12) и интегрируя по кольцу, окончательно получаем

$$\vec{A}(\vec{R}) = -\frac{\pi R_0^2 J \sin\theta}{cR^2} \vec{n}_x = \frac{[\vec{m} \times \vec{R}]}{R^3} \, ,$$

где $\vec{m} = \frac{\pi R_0^2 J}{c} \vec{n}_z$— магнитный момент кольца радиуса R_0 с током J.

Р.45. Найти магнитный момент однородно заряженного шара (сферы), вращающегося вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Заряд шара — Q, радиус — a.

а) Найдем магнитный момент сферы. Возьмем на поверхности сферы узкий поясок, заключенный между углами θ и $\theta + d\theta$. Заряд,



вращаясь вместе со сферой, создает ток, величина которого на выделенном пояске

$$dJ = v\sigma a \, d\theta = \frac{1}{4\pi} Q\omega \sin\theta \, d\theta \, ,$$

где $v = \omega a \sin\theta$ — скорость вращения пояска, $\sigma = Q/4\pi a^2$ — поверхностная плотность заряда. Магнитный момент этого тока

$$d\vec{m} = \frac{dJ \, \vec{s}}{c} = \frac{\pi a^2 Q \vec{\omega}}{4\pi c} \sin^3\theta \, d\theta \, .$$

Интегрируя по θ, находим магнитный момент всей сферы:

$$\vec{m} = \int d\vec{m} = \frac{Qa^2\vec{\omega}}{4c} \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \frac{Qa^2\vec{\omega}}{3c} \, .$$

б) Найдем магнитный момент равномерно заряженного вращающегося вокруг одного из своих диаметров шара. Используя результат предыдущей задачи, магнитный момент тонкого шарового слоя радиуса R толщины dR выразится так:

$$d\vec{m} = \frac{\vec{\omega}R^2}{3c}\,dQ\,,$$

где dQ — заряд шарового слоя. Так как

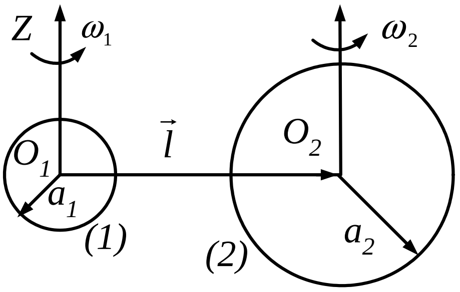
$$dQ = \frac{Q}{4\pi a^3/3}\cdot 4\pi R^2\,dR = \frac{3QR^2\,dR}{a^3}\,,$$

то магнитный момент шара будет равен

$$\vec{m} = \frac{Q\vec{\omega}}{ca^3}\int\limits_0^a R^4\,dR = \frac{Qa^2}{5c}\vec{\omega}\,.$$

Р.46. Два равномерно заряженных шарика с зарядами q_1, q_2 и радиусами a_1, a_2 вращаются без поступательного движения с угловыми скоростями $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ так, что векторы $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ перпендикулярны отрезку $\vec{l}$, соединяющему центры шаров ($l \gg a_1$, a_2). Оценить силу взаимодействия шариков.

Выберем начало координат в центре шара (1). Ось Z совпадает с направлением $\vec{\omega}_1$, центр второго шара находится на расстоянии l в плоскости (X, Y). Сила взаимодействия шаров складывается из сил кулоновского и магнитного взаимодействий. Она может быть представлена как сила, действующая на шар 2 со стороны шара 1. Поскольку расстояние между шарами велико по сравнению с их размерами, то силу магнитного взаимодействия можно рассматри-



вать как силу взаимодействия двух магнитных моментов:

$$\vec{F}_m = (\vec{m}_2\,\vec{\nabla})\vec{H}_1\,, \qquad \vec{H}_1 = \frac{3\vec{R}(\vec{R}\,\vec{m}_1)}{R^5} - \frac{\vec{m}_1}{R^3}\,,$$

где $\vec{m}_{1,2} = q_{1,2}a_{1,2}^2\vec{\omega}_{1,2}/5c$; $\vec{H}_1$— поле, создаваемое магнитным моментом $\vec{m}_1$ на большом расстоянии, $\vec{m}_2$— магнитный момент шара (2). Поскольку у $\vec{m}_2$ есть только составляющая по Z, то скалярное произведение вектора $\vec{m}_2$ и вектора $\vec{\nabla}$ запишется так:

$$(\vec{m}_2\,\vec{\nabla}) = m_2\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

а сила магнитного взаимодействия

$$\vec{F}_m = m_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3\vec{R}(\vec{R}\,\vec{m}_1)}{R^5} - \frac{\vec{m}_1}{R^3}\right).$$

Далее, вычисляя производные по z, находим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3\vec{R}(\vec{R}\,\vec{m}_1)}{R^5}\right) = \frac{3\vec{m}_1 z}{R^5} + \frac{3m_1\vec{R}}{R^5} - \frac{15z^2 m_1\vec{R}}{R^7}\,.$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\vec{m}_1}{R^3}\right) = -\frac{3\vec{m}_1 z}{R^5}\,.$$

Подставляя в найденные выражения $z = 0$, $\vec{R} = \vec{l}$, окончательно получаем

$$\vec{F}_m = \frac{3m_1 m_2\vec{l}}{l^5}\,.$$

Таким образом, при $l \gg a_1$, a_2 полная сила взаимодействия

$$\vec{F} = \frac{3}{25}\frac{q_1q_2}{c^2}\omega_1\omega_2\frac{\vec{l}}{l^5} + \frac{q_1q_2\vec{l}}{l^3}\,.$$

Силу магнитного взаимодействия можно представить и так:

$$\vec{F}_m = \operatorname{grad}(\vec{m}_2\,\vec{H}_1)\Big|_{\vec{R}=\vec{l}} = \operatorname{grad}\left(\frac{3(\vec{R}\,\vec{m}_2)(\vec{R}\,\vec{m}_1)}{R^5} - \frac{(\vec{m}_2\,\vec{m}_1)}{R^3}\right)\Bigg|_{\vec{R}=\vec{l}} =$$

$$= -\operatorname{grad}\left(\frac{(\vec{m}_2\,\vec{m}_1)}{R^3}\right)\Bigg|_{\vec{R}=\vec{l}} = \frac{3m_1m_2\vec{l}}{l^5}.$$

5. МАГНИТОСТАТИКА В СРЕДЕ

Закон Био—Савара в среде:

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{c}\frac{J\left[d\vec{l}\times\vec{r}\right]}{r^3} = \frac{\mu}{c}\frac{\left[\vec{j}\times\vec{r}\right]dV}{r^3} = \frac{\mu\left[\vec{v}\times\vec{r}\right]}{cr^3}dq$$

Сила Ампера в среде:

$$d\vec{F} = \frac{J\left[d\vec{l}\times\vec{B}\right]}{c} = \frac{\left[\vec{j}\times\vec{B}\right]dV}{c} = \frac{\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]dq}{c}$$

Вектор намагниченности $\vec{M}$ — дипольный момент единицы объема

$$d\vec{m} = \vec{M}dV,\;\; \vec{j}_{\text{мол}} = c\operatorname{rot}\vec{M}.$$

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}.$$

Дифференциальные уравнения Максвела в среде:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,\;\; \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j},\;\; \text{где}\;\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}.$$

В интегральной форме:

$$\oint\!\!\!\!\oint B_n dS = 0,\;\; \oint H_l dl = \frac{4\pi}{c}\iint j_n dS.$$

Граничные условия:

$$B_{1n}| = B_{2n}|,\;\; \vec{H}_{1\tau}| - \vec{H}_{2\tau}| = \frac{4\pi}{c}\left[\vec{I}_{\text{пов}}\times\vec{n}_{21}\right].$$

Магнитная проницаемость $\mu = 1$ — вакуум, $\mu \gtrsim 1$ — парамагнетик, $\mu \lesssim 1$ — диамагнетик, $\mu = 0$ — сверхпроводник (эффект Мейснера), $\mu \gg 1$ — ферромагнетик.

Энергия магнитного поля $\mathcal{E} = \int \frac{\mu H^2}{8\pi} dV$, сила давления магнитного поля $F_n = \int p dS = \int \frac{\mu H^2}{8\pi} dS$.

Правила Кирхгофа для потока магнитного поля:

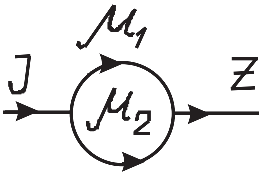
$$\sum \Phi_k = 0, \ \sum \mathcal{E}_M = \sum \Phi_k J_k,$$

где

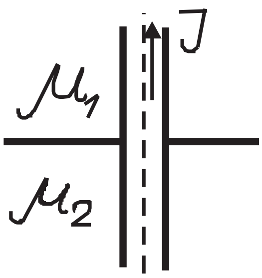
$$\mathcal{E}_M = \frac{4\pi}{c} JN.$$

5.1. Граничные условия для магнитного поля. Метод изображений. Постоянные магниты. Магнитные цепи

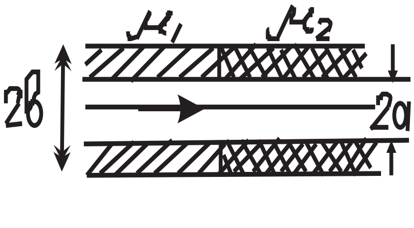
5.1. В пространстве, заполненном магнетиком с проницаемостью μ_1, — бесконечный прямолинейный проводник с током J (вдоль оси Z). Проводящая сфера с центром в начале координат (радиус её a) заменяет соответствующую часть линейного проводника. Внутри сферы — магнетик с проницаемостью μ_2. Найти $\vec{B}$ и $\vec{H}$ всюду.



5.2. Цилиндрический проводник радиуса a проходит перпендикулярно через плоскую границу раздела двух магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2. По проводнику идет постоянный ток J. Найти распределение полей $\vec{H}$ и $\vec{B}$ во всем пространстве.



5.3. Прямой провод с постоянный током J проходит по оси симметрии толстой трубы с радиусами a, b $(a < b)$. Одна половина трубы имеет магнитную проницаемость μ_1, вторая — μ_2.



Найти $\vec{B}$ во всем пространстве.

5.4. Ток J течет по прямолинейному проводу, совпадающему с осью Z. От оси расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным магнетиком с магнитными проницаемостями соответственно μ_1, μ_2, μ_3. Определить магнитное поле во всём пространстве.

5.5. Найти магнитное поле в тонкой плоской щели, если поле в среде (μ) можно считать однородным.

5.6. Бесконечный прямолинейный провод радиуса a с магнитной проницаемостью μ_1 находится во внешнем однородном поперечном магнитном поле $\vec{H}_0$ в среде с магнитной проницаемостью μ_2. По проводу течет постоянный ток J. Найти векторный потенциал и магнитное поле во всем пространстве.

5.7. В однородное магнитное поле $\vec{H}_0$ вносится шар радиуса a с магнитной проницаемостью μ_1. Определить результирующее поде, индуцированный магнитный момент шара $\vec{m}$ и плотность токов $\vec{j}_{\text{мол}}$, эквивалентных приобретаемой шаром намагниченности. Магнитная проницаемость окружающей среды μ_2.

5.8. Найти магнитное поле в сферической полости радиуса a, находящейся во внешнем однородном магнитном поле. Магнитная проницаемость среды, окружающей полость, равна μ.

5.9. Равномерно намагниченная сфера (идеализированный ферромагнетик) вносится во внешнее однородное магнитное поле $\vec{H}_0$. Найти результирующее магнитное поле. Магнитная проницаемость сферы μ_1, окружающей среды μ_2.

5.10. Решить задачу 5.7, если шар, вносимый в поле, сверхпроводящий.

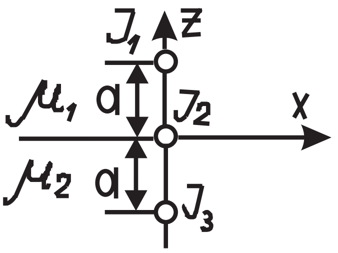
5.11. В однородное магнитное поле $\vec{H}$ помещена сверхпроводящая сферическая оболочка радиуса R. Найти силу, приложенную к каждой из симметричных полусфер.

5.12. Бесконечно длинная полая цилиндрическая оболочка с радиусами a и b $(a < b)$ находится во внешнем однородном магнитном поле $\vec{H}_0$, перпендикулярном ее оси. Магнитная проницаемость цилиндра — μ_1, окружающего пространства — μ_2. Найти поле в полости. Рассмотреть частный случай $\mu_1 \gg \mu_2$.

5.13. Контур с током лежит в плоскости раздела двух сред с проницаемостями μ_1 и μ_2. Определить магнитное поле во воем пространстве, считая известным поле H_0, создаваемое этим контуром в вакууме.

5.14. Бесконечный прямой провод с током J расположен параллельно плоской границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (провод — в среде с μ_1). Расстояние от провода до границы a. Определить магнитное поле во всем пространстве.

5.15. Верхнее полупространство — магнетик с проницаемостью μ_1,



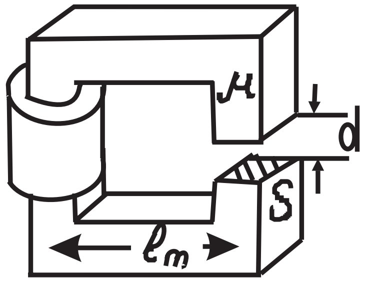
нижнее — с проницаемостью μ_2. На оси Z на расстоянии a от оси Y по линейным проводникам идут токи J_1 и J_3, а вдоль самой оси Y идет ток J_2. Найти силу, действующую на единицу длины проводника о током J_1. Проводники параллельны оси Z.

5.16. Прямолинейный провод с током J расположен параллельно оси бесконечного кругового цилиндра на расстоянии b от нее. Радиус цилиндра — a $(a < b)$, магнитная проницаемость — μ. Найти поле и силу, действующую на единицу длины провода.

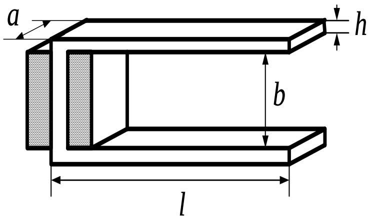
5.17. Прямолинейный провод с током J расположен внутри бесконечной цилиндрической полости, вырезанной в однородной магнитной среде. Провод расположен параллельно оси цилиндра на расстоянии b от нее. Радиус цилиндра — a, магнитная проницаемость магнетика — μ. Найти поле и силу, действующую на единицу длины провода.

5.18. Небольшой постоянный магнит, момент которого $\vec{m}$, находится в пустоте вблизи плоской границы вещества с магнитной проницаемостью μ. Определить силу и вращающий момент, действующие на

постоянный магнит.

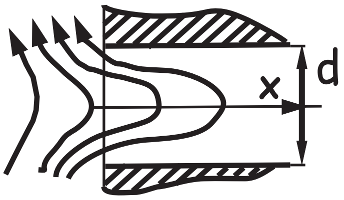


5.19. Найти поле электромагнита с узким зазором.



5.20. Найти рассеянное магнитное поле в зазоре электромагнита с очень длинными полюсами $(b \ll \ell, a)$.

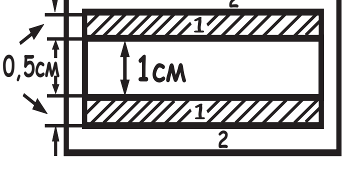
5.21. Соленоид радиуса a, имеющий N витков (равномерно распределенных по длине ℓ), с током J, помещен между двумя соосными цилиндрическими "блинами"радиуса R, сделанными из магнетика с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. Найти магнитное поле между "блинами". Краевыми эффектами пренебречь $(R \gg \ell)$.



5.22. Оценить провисание магнитного поля в узкую длинную щель, ограниченную сверхпроводником.

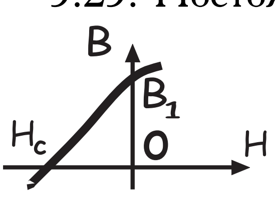
5.23. Найти поле постоянного шарообразного магнита.

5.24. Найти максимальное магнитное поле шарообразного постоянного магнита радиуса $R = 10$ см, приняв в данном случае зависимость $B(H) = 4\pi B_0(1 + \frac{H}{H_0})$, где поле насыщения $B_0 = 2T$, а коэрцитивная сила $H_0 = 100$ Э.



а

5.25. Постоянный магнит выполнен из двух пластин намагниченного ферромагнетика 1 и охватывавшего его магнитопровода 2. Размеры системы даны на рисунке (а). Связь между B и H в ферромагнетике задана кривой на рисунке (б) $B_1 = H_c = 3$ кГс. Найти поле в зазоре.

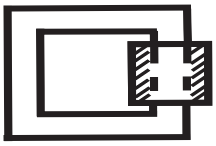


5.2. Взаимодействие токов с магнитным полем. Энергия и давление поля

5.26. Пружина радиуса r и длины ℓ свита из куска провода в N—витковую катушку-пружину с упругостью k и малыми межвитковыми зазорами. Описать ее движение при пропускании тока J.

5.27. По жиле радиуса r и сверхпроводящей оплетке с внутренним радиусом R текут противоположные токи. Исследовать устойчивость жилы относительно изгибов при различны r/R.

5.28. Зазор магнитопровода $(\mu \gg 1)$ окружен плоской шиной,

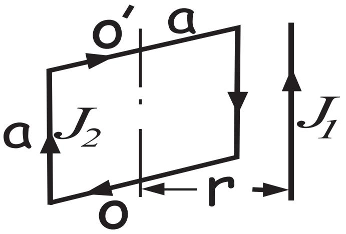


по которой течет ток J. Найти давления (по величине и направлению) на поверхности шины и железа (высота зазора много меньше его ширины).

5.29. По кольцу радиуса $R = 0,1$ м идет ток $J = 1$ А. Кольцо находится в поле $H = 100$ Э, которое перпендикулярно плоскости кольца. Найти натяжение кольца в граммах.

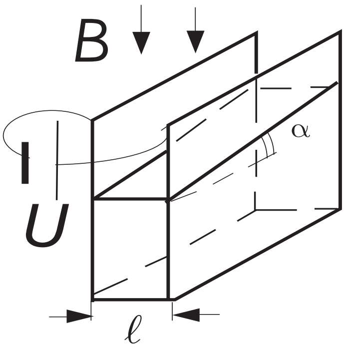
5.30. Бесконечный прямолинейный ток J_1 и круговой ток J_2 радиуса a лежат в одной плоскости. Расстояние от центра кругового тока до прямолинейного — $b > a$. Найти силу, действующую на круговой ток.

5.31. Квадратная рамка с током J_2 расположена так, что две ее



стороны параллельны длинному прямому проводу с током J_1. Сторона квадрата — a. Определить действующую на рамку силу и вращательный момент относительно оси OO'.

5.32. В ванну налита ртуть. Параллельно противоположным тор-



цам ванны вплотную к ним опущены электроды, размер которых совпадает о размерами торцевых поверхностей. Расстояние между электродами ℓ много меньше поперечных размеров электродов. Ванна помешается в магнитное поле B, перпендикулярное дну ванны

(см. рисунок). Под каким углом к горизонту расположится поверхность ртути, если к электродам приложить напряжение U? Удельное сопротивление ртути — ρ удельный вес — d.

5.33. По бесконечному сплошному цилиндрическому проводнику радиуса R идет ток J. Найти давление на оси проводника.

5.34. Найти расталкивающую силу, которая действует на электроны цилиндрического пучка радиуса a с равномерной плотностью n и током J.

5.35. Над сверхпроводящей плоскостью, вдоль неё, на высоте h расположен длинный узкий соленоид длины ℓ радиуса $R \ll \ell, h$, с числом витков N и током J. Оценить силу, действующую на соленоид.

5.3. Решение типичных задач

Р.47. Равномерно намагниченная сфера (идеализированный ферромагнетик) вносится во внешнее однородное магнитное поле $\vec{H}_0$. Найти результирующее магнитное поле. Магнитная проницаемость сферы — μ_1, окружающей среды — μ_2.

Пусть $\vec{M}_0$ — вектор намагниченности. Уравнения, описывающие распределение магнитного поля намагниченного шара в однородном магнитном поле, имеют вид $\mathrm{rot}\ \vec{H} = 0$, $\mathrm{div}\ \vec{B} = 0$, из которых следуют граничные условия $H_{1\tau}| = H_{2\tau}|$; $B_{1n}| = B_{2n}|$ (непрерывность тангенциальной составляющей напряженности магнитнго поля и непрерывность нормальной составляющей магнитной индукции). Решением первого уравнения является функция $\vec{H} = -\,\mathrm{grad}\ \psi$. Подставляя это решение во второе уравнение, получаем уравнение Лапласа для скалярного потенциала $\nabla^2\psi = 0$. Таким образом, задача магнитного шара в магнитном поле аналогична задаче диэлектрического шара в электрическом поле (см. Р.22). Потенциал внутри шара будем

искать в виде

$$\psi_1 = -c_1(\vec{H}_0\,\vec{R}) + b_1(\vec{M}_0\,\vec{R}) \qquad \text{при} \qquad R \le a\,.$$

Наличие второго слагаемого учитывает тот факт, что при снятии поля $\vec{H}_0$ в шаре остается поле, порождаемое собственной намагниченностью. Вне шара

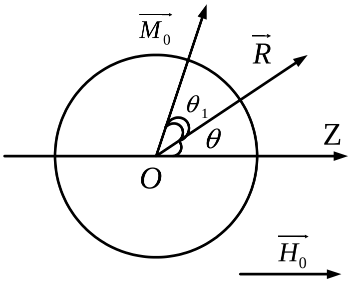
$$\psi_2 = -(\vec{H}_0\,\vec{R}) + \frac{1}{R^3}\Big[b_2(\vec{M}_0\,\vec{R}) + b_3(\vec{H}_0\,\vec{R})\Big] \qquad \text{при} \qquad R \ge a\,.$$

Второе слагаемое учитывает наличие поля от собственного и индуцированного магнитных моментов шара. Направим ось Z вдоль $\vec{H}_0$. Перепишем потенциалы в следующем виде:

$$\psi_1 = -c_1 H_0 R\cos\theta + b_1 M_0 R\cos\theta_1 \qquad \text{при} \qquad R \le a\,,$$

$$\psi_2 = -H_0 R\cos\theta + \frac{b_3 H_0\cos\theta}{R^2} + \frac{b_2 M_0\cos\theta_1}{R^2} \qquad \text{при} \qquad R \ge a\,.$$

где θ — угол между направлением поля $\vec{H}_0$ и радиус-вектором $\vec{R}$ до точки набюдения, а θ_1— угол между направлением вектора намагниченности шара $\vec{M}_0$ и $\vec{R}_0$. Запишем условие непрерывности потенциала на поверхности шара $\psi_1(a) = \psi_2(a)$. Оно эквивалентно условию непрерывности тангенциальной составляющей магнитного поля $H_{1\tau} = H_{2\tau}$:



$$\left(H_0 a - c_1 H_0 a - \frac{b_3 H_0}{a^2}\right)\cos\theta = \left(\frac{b_2 M_0}{a^2} - b_1 M_0\right)\cos\theta_1\,.$$

Поскольку это равенство должно выполняться при любых углах θ и θ_1, то коэффициенты при $\cos\theta$ и $\cos\theta_1$ обращаются в нуль. Получаем

$$b_1 = \frac{b_2}{a^3}\,, \qquad c_1 = 1 - \frac{b_3}{a^3}\,.$$

Найдем проекции вектора $\vec{B}$ на направление радиус-вектора $\vec{R}$. Для идеализированного ферромагнетика внутри шара

$$\vec{B}_1 = \mu_1\vec{H}_1 + 4\pi\vec{M}_0 \qquad \text{при} \qquad R > a,$$

где $\vec{M}_0$ — постоянная, не зависящая от $\vec{H}$ намагниченность. Вне шара $\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$, тогда

$$B_{1R} = \mu_1 \left(- \frac{\partial \psi_1}{\partial R} \right) + 4\pi M_0 \cos\theta_1 =$$

$$= \mu_1 c_1 H_0 \cos\theta - \mu_1 b_1 M_0 \cos\theta_1 + 4\pi M_0 \cos\theta_1 \,,$$

$$B_{2R} = \mu_2 \left(- \frac{\partial \psi_2}{\partial R} \right) = \mu_2 H_0 \cos\theta + \frac{2\mu_2}{R^3} (b_2 M_0 \cos\theta_1 + H_0 \cos\theta) \,.$$

Из условия непрерывности нормальной составляющей вектора $\vec{B}$ на поверхности шара $B_{1R}(a) = B_{2R}(a)$ получаем

$$c_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(1 - \frac{b_3}{a_3} \right) , \qquad b_1 = \frac{4\pi}{\mu_1} \frac{2b_2}{a} \frac{\mu_2}{\mu_1} \,.$$

Окончательно

$$c_1 = \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} , \quad b_1 = \frac{4\pi}{2\mu_2 + \mu_1} , \quad b_2 = \frac{4\pi a^3}{2\mu_2 + \mu_1} , \quad b_3 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\mu_2 + \mu_1} a^3 \,.$$

$$\psi_1 = -\frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} (\vec{H}_0 \, \vec{R}) + \frac{4\pi}{2\mu_2 + \mu_1} (\vec{M}_0 \, \vec{R}) \qquad \text{при} \qquad R \le a \,.$$

$$\psi_2 = -(\vec{H}_0 \, \vec{R}) + \frac{(\vec{m} \, \vec{R})}{R^3} \qquad \text{при} \qquad R \ge a \,,$$

где

$$\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{2\mu_2 + \mu_1} \vec{M}_0 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \, a^3 \vec{H}_0 \,.$$

Распределение напряженности магнитного поля имеет вид

$$\vec{H}_1 = \vec{\nabla} \psi_1 = \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \vec{H}_0 - \frac{4\pi}{2\mu_2 + \mu_1} \vec{M}_0 \qquad \text{при} \qquad R \le a \,,$$

$$\vec{H}_2 = \vec{\nabla} \psi_2 = \vec{H}_0 + \frac{3\vec{R}(\vec{m} \, \vec{R})}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3} \qquad \text{при} \qquad R > a \,.$$

При вычислении полей $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ использованы формулы векторного анализа

$$\mathrm{grad}\,(\varphi_1 \, \varphi_2) = \varphi_1 \ \mathrm{grad}\ \varphi_2 + \varphi_2 \ \mathrm{grad}\ \varphi_1 \,;$$

$$\text{grad}\,(\vec{A}\,\vec{B}) = [\vec{A}\times \text{rot}\,\vec{B}] + [\vec{B}\times \text{rot}\,\vec{A}] + (\vec{A}\,\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\,\vec{\nabla})\vec{A}$$

и

$$\text{rot}\,\vec{R} = \text{rot}\,\vec{H}_0 = \text{rot}\,\vec{M}_0 = 0$$

$$(\vec{H}_0\,\vec{\nabla})\vec{R} = \vec{H}_0\,, \qquad (\vec{R}\,\vec{\nabla})\vec{H}_0 = 0\,,$$

$$\text{grad}\left(\frac{1}{R^3}\right) = -\frac{3\vec{R}}{R^5}\,.$$

Если шар предварительно не был намагничен ($\vec{M}_0 = 0$), то

$$\vec{H}_1 = \frac{3\mu_2}{2\mu_2+\mu_1}\vec{H}_0\,,$$

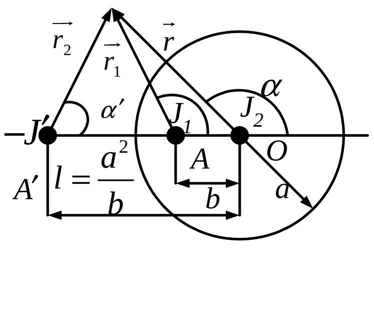
$$\vec{H}_2 = \vec{H}_0 + \vec{H}_{\text{дип}}\,,$$

где $\vec{H}_{\text{дип}}$ — поле, создаваемое индуцированным магнитным моментом

$$\vec{m} = \frac{\mu_1-\mu_2}{2\mu_2+\mu_1}\,a^3\vec{H}_0\,.$$

Р.48. Прямолинейный провод с током J расположен внутри бесконечной цилиндрической полости, вырезанной в однородной магнитной среде. Провод расположен параллельно оси цилиндра на расстоянии b от нее. Радиус цилиндра — a, магнитная проницаемость магнетика — μ. Найти поле и силу, действующую на единицу длины провода.

Векторы поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ во всем пространстве, кроме точек оси, вдоль которой течет ток J, удовлетворяют однородным уравнениям $\text{div}\,\vec{B} = 0, \text{rot}\,\vec{H} = 0$. Поэтому можно ввести векторный $\vec{A}$ и скалярный ψ, потенциалы которые будут удовлетворять во всем пространстве уравнениям Лапласа:



$$\nabla^2\vec{A} = 0\,; \qquad (1)$$

$$\nabla^2\psi = 0\,, \qquad (2)$$

где $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{H} = -\operatorname{grad}\psi$.

В результате задача магнитостатики сведена к задаче электростатики, которую будем решать, используя метод изображений. Поле внутри полости попытаемся найти как поле, которое создалось бы в вакууме реальным током J, проходящим через точку A на расстоянии b от центра цилиндрической полости, и фиктивным током $(-J')$, расположенным на расстоянии $l = a^2/b$ от оси полости. Расстояние l выбирается таким для того, чтобы отношение r_2/r_1 было постоянным для точек окружности радиуса a: $r_2/r_1 = a/b$, что дает возможность удовлетворить граничным условиям на поверхности цилиндрической полости.

Поле вне полости будем искать как поле, создаваемое в однородном магнетике μ двумя фиктивными токами J_1 и J_2, проходящими через точки соответственно A и 0.

Векторный потенциал для прямого тока в цилиндрической системе (см. Р.44) равен

$$A_z = -\frac{2J}{c}\ln r + \text{const} \ .$$

Эта функция является решением уравнения (1). Используя принцип суперпозиции, находим (см. рисунок):

$$\begin{aligned} A_{1z} &= -\frac{2J}{c}\ln r_1 + \frac{2J'}{c}\ln r_2 + c_1 \qquad \text{при} \qquad r \le a, \\ A_{2z} &= -\frac{2\mu J_1}{c}\ln r_1 - \frac{2\mu J_2}{c}\ln r + c_2 \qquad \text{при} \qquad r \ge a. \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку циркуляция вектора $\vec{H}$ по контуру, охватываемому полость, равна $4\pi J/c$, то

$$J_1 + J_2 = J. \tag{4}$$

Найдем скалярный потенциал прямого тока. Для прямого тока силовые линии имеют форму окружностей с центрами на оси тока и напря-

женность магнитного поля имеет только касательные к окружностям составляющие (см. Р.49)

$$H_\alpha = \frac{2J}{cr}\,.$$

Поскольку $H_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$, то для скалярного потенциала прямого тока находим

$$\psi = -\frac{2J}{c}\alpha\,.$$

Для нашей задачи, используя принцип суперпозиции, запишем

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{2J}{c}\alpha_1 + \frac{2J'}{c}\alpha' \qquad \text{при} \qquad r \le a, \\ \psi_2 &= -\frac{2J_1}{c}\alpha_1 - \frac{2J_2}{c}\alpha \qquad \text{при} \qquad r \ge a\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Если положить $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, $A_{1z}(a) = A_{2z}(a)$, то тем самым окажутся выполненными условия для тангенциальных составляющих магнитного поля $H_{1\alpha}(a) = H_{2\alpha}(a)$ и нормальных составляющих вектора магнитной индукции $B_{1r}(a) = B_{2r}(a)$ на поверхности цилиндра, вытекающие из уравнений $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\operatorname{rot}\vec{H} = 0$. Из системы (5) с учетом уравнения (4) и равенства $\alpha' = \alpha - \alpha_1$ получаем $J' = -J_2$. Запишем условие непрерывности векторного потенциала на поверхности цилиндра:

$$\frac{2}{c}\left(J(\mu-1) - \mu J_2 + J'\right)\ln r_1 = c_2 - c_1 - \frac{2\mu J_2}{c}\ln a - \frac{2J'}{c}\ln\frac{a}{b} \tag{6}$$

Здесь использована связь $r_2 = r_1 a/b$ и соотношение (4). Поскольку правая сторона уравнения (6) — константа, то, для того чтобы уравнение удовлетворялось при всех r_1, нужно положить

$$J(\mu-1) - \mu J_2 + J' = 0\,,$$

$$c_2 - c_1 = \frac{2\mu J_2}{c}\ln a + \frac{2J'}{c}\ln\frac{a}{b}.$$

Окончательно находим

$$J_2 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} J\,, \qquad J' = -\frac{\mu - 1}{\mu + 1} J\,, \qquad J_1 = \frac{2}{\mu + 1} J\,.$$

Сила, действующая на единицу длины тока J, равна

$$\vec{F} = \frac{[\vec{J} \times \vec{B}]}{c}\,,$$

где $\vec{B}$ — магнитная индукция в месте расположения J, создаваемая всеми токами, кроме самого J. В нашем случае это поле от тока J'. Поэтому

$$\vec{F} = -\frac{2JJ'}{c\,(l-b)}\frac{\vec{b}}{b} = \frac{2(\mu-1)}{\mu+1}\frac{J^2}{c^2\,(a^2-b^2)}\vec{b}\,.$$

Если $\mu > 1$, линейный проводник с током притягивается к ближайшей части поверхности стенки, при $\mu < 1$ — отталкивается.

6. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Условия квазистационарности:

$$1)\ l << \lambda = T/c = 2\pi/(\omega c);$$

$$2)\ j = \sigma E >> j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t}.$$

Закон Фарадея:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c}\iint B_n dS.$$

Магнитный поток:

$$\Phi = \frac{1}{c}\iint B_n dS = \frac{LJ}{c}.$$

Потокосцепление:

$$N = \int dn, \ \Phi = N\Phi_0.$$

Энергия:

$$W = -\int J\mathcal{E}dt = \int \frac{JL}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t}dt = \frac{L}{c^2}\int JdJ = \frac{J^2}{2c^2} = \frac{J\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Магнитный поток сохраняется: 1) в присутствии сверхпроводника (вмораживание силовых линий); 2) при $t << \tau_M = \sigma\mu l^2/c^2$.

Силовые линии магнитного поля не пересекаются из-за однозначности поля или в точке возможного пересечения поле должно быть равно нулю.

Дифференциальное уравнение силовых линий:

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial H_{q_1}}{\partial q_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial H_{q_2}}{\partial q_2} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial H_{q_3}}{\partial q_3}.$$

Для квазистационарных токов справедливо правило Кирхгофа.

Дифференциальные уравнения для скин-эффекта в одномерном случае:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial x^2} = 4\pi\mu\sigma\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$$

Его решение для полубесконечного пространства

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)},$$

где $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ — глубина проникновения.

Поток электромагнитной энергии — вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\vec{H}].$$

6.1. Индуктивность. Взаимная индукция

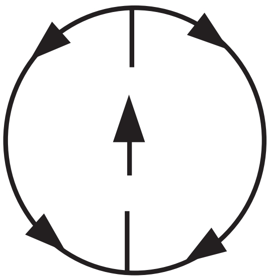
6.1. Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек с радиусами $a < b$, пространство между ними заполнено

веществом с магнитной проницаемостью μ. Найти коэффициент самоиндукции на единицу длины линии.

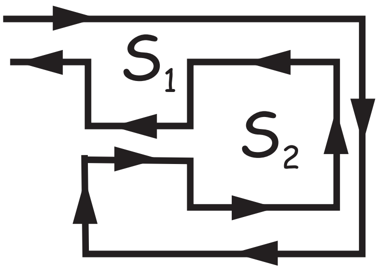
6.2. Вычислить внутреннюю часть самоиндукции единицы длины прямолинейного провода круглого сечения радиуса a. Магнитная проницаемость провода μ.

6.3. Вычислить самоиндукцию единицы длины коаксиального кабеля, жила которого имеет радиус R_0, а оболочка — внутренний радиус R_1, наружный — R_2. Магнитная проницаемость проводов — μ_1, изоляции между ними — μ_2.

6.4. Внутри металлического шара радиуса R по диаметру проходит тонкая проволочка радиуса $r_0 \ll R$. По ней идет ток J, далее растекающийся по сфере и снова сходящийся к проволочке. Найти: а) магнитное поле внутри и вне сферы; б) оценить индуктивность системы.



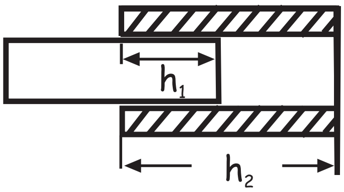
6.5. В прямоугольный короб с поперечным сечением S_1 вложен другой прямоугольный короб сечением S_2 (длины коробов одинаковы $(\ell \gg \sqrt{S})$) так, что их стенки параллельны. Короба разрезаны вдоль образующей и соединены последовательно (как показано на рисунке). Магнитная проницаемость всей среды равна μ. Найти индуктивность системы.



6.6. Самоиндукция плоского контура в воздухе$(\mu = 1)$ равна L. Найти самоиндукцию контура, если его положить на плоскую границу полупространства, заполненного однородным магнетиком с магнитной проницаемостью μ.

6.7. Найти коэффициент самоиндукции на единицу длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и с произвольной (не обязательно круговой) формой сечения. Площадь сечения — S, число витков на единицу длины — n.

6.8. Найти индуктивность соленоида длиной h_2, число витков — N,



поперечное сечение — S, внутрь которого вставлен сердечник с магнитной проницаемостью μ.

6.9. Найти коэффициент самоиндукции тороидального соленоида. Радиус тора — b, число витков — N, сечение тора — круг радиуса a. Определить коэффициент самоиндукции на единицу длины соленоида в предельном случае $b \to \infty$ $(N/b = \mathrm{const})$. Решить ту же задачу для тороидального соленоида, сечении которого — прямоугольник со сторонами a, h. Как изменится самоиндукция, если равномерно распределенный ток будет течь, сохраняя то же направление, не по проводу, намотанному на тор, а прямо по полой оболочке тора?

6.10. Найти индуктивность соленоида с числом витков $N \gg 1$, намотанного тонким слоем на шарообразный сердечник радиуса a с магнитной проницаемостью μ так, что витки лежат вдоль линий $\theta = \mathrm{const}$, а плотность намотки меняется по закону

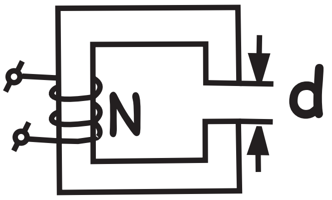
$$n(\theta) = \frac{N}{2a}\sin\theta, \quad \left(\int\limits_0^\pi n(\theta)\, a d\theta = N\right).$$

6.11. Найти индуктивность двух однородных проводящих пластин

с размерами $h \times \ell$, одной тонкой, другой толстой (толщина $d \ll \ell, h$), разделенных тонкослойным изолятором и закороченных на торцах. Краевыми эффектами пренебречь.

6.12. Определить коэффициент самоиндукции на единицу длины двухпроводной линии. Линия состоит из двух параллельных прямых проводов, радиусы которых — a и b, расстояние между осевыми линиями — h. По проводам текут равные по величине, но противоположно направленные токи J.

6.13. На железное ярмо с зазором d намотана обмотка из N витков.

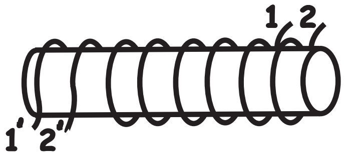


Сечение железа — S, магнитная проницаемость — μ, длина — ℓ. Найти индуктивность.

6.14. Внутрь соленоида, имеющего N витков, длину ℓ и площадь сечения S_1, вставлен коаксиально второй соленоид с тем же направлением намотки и той же длины ℓ, но иным числом витков N_2 и площадью сечения S_2 ($\ell \gg \sqrt{S_1}, \sqrt{S_2}$), края соленоидов совпадают. Обмотки соединены последовательно так, что токи в обоих соленоидах текут в одинаковых направлениях. Найти индуктивность системы: 1) через энергию; 2) через потокосцепление.

6.15. На один сердечник намотаны две катушки с коэффициентами самоиндукции $L_1 = 0,5$ Гн и $L_2 = 0,7$ Гн соответственно. Чему равен коэффициент взаимоиндукции? Рассеяния магнитного поля нет.

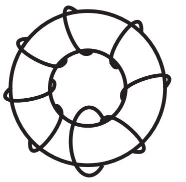
6.16. На длинный цилиндр намотаны вплотную две обмотки (1,1') и (2,2') как показано на рисунке. Коэффициент самоиндукции каждой обмотки равен 0,05 Гн. Чему будет равен коэффициент самоиндукции всей цепи, если: 1) концы 1' и 2' соединить, а в цепь включить концы 1 и 2; 2) концы 1 и 2' соединить, а в цепь включить концы 1' и 2'; 3) концы 1' и 2' и 1 и 2 соединить и обе пары концов включить в цепь?



6.17. Найти коэффициент взаимной индукции между прямым проводом и проволочным кольцом, если провод лежит в плоскости кольца.

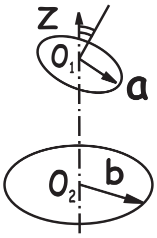
6.18. Вычислить коэффициент взаимоиндукции между прямым проводом и проволочной прямоугольной рамкой $a \times b$, если провод лежит в плоскости рамки вдоль одной из ее сторон о длиной b и на расстоянии h от ближайшей стороны.

6.19. Тороидальный соленоид с круговым поперечным сечением радиуса a и средним радиусом тора r_0, имеющий суммарное число витков N, охвачен замкнутым витком. Найти коэффициент взаимоиндукции витка и солено-



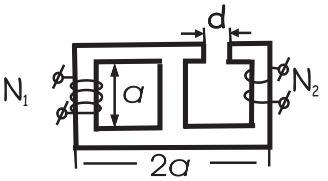
ида при $a \ll r_0$.

6.20. На оси Z проволочного кольца радиуса b на расстоянии h от плоскости кольца находится центр другого проволочного кольца радиуса $a (a \ll b)$ нормаль к плоскости которого образует с осью Z угол θ. Найти коэффициент взаимной индукции колец.



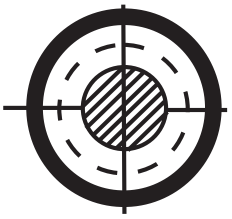
6.21. Две катушки с поперечным сечением S расположены на расстоянии $\ell \gg \sqrt{S}$ так, что оси их параллельны. Найти коэффициент взаимной индукции катушек. Числа витков на катушках N_1 и N_2 соответственно.

6.22. Найти коэффициент взаимной индукции двух катушек трансформатора с Ш-образным сердечником, если зазор $d \ll a$ (см. рисунок). Справедливо ли равенство $M_{12} = M_{21}$.

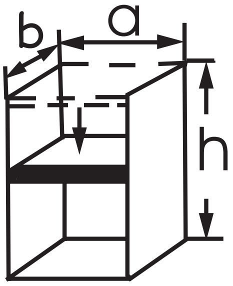


6.2. Сохранение магнитного потока

6.23. Внутри сверхпроводящего бесконечного цилиндра с сечением S_1 расположены аксиально симметрично бесконечный соленоид с сечением S_2 и вокруг него одиночный измерительный виток с площадью S_3. В соленоиде создается магнитное поле H. Найти изменение магнитного потока через контур витка.



6.24. Две параллельные шины замкнуты на нижнем конце неподвижной перемычкой с размерами $a \times b$, а сверху — «поршнем» веса P и размерами $a \times b$. Все материалы сверхпроводящие, поле между шинами H_0. Трением пренебречь. Найти зависимость $h(t)$, считая поле внутри контура однородным $(h \gg a, b)$ и пренебрегая обратным полем.



6.25. Сверхпроводящее плоское кольцо с самоиндукцией L, в кото-

ром течет ток J, вдвигается полностью в однородное магнитное поле $\vec{H}_0$. Найти ток J', который будет после этого протекать по кольцу. Площадь осевого сечения кольца — S. Нормаль к плоскости кольца составляет с направлением $\vec{H}_0$ угол θ.

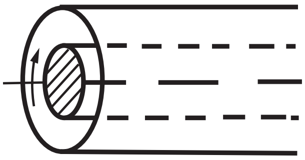
6.26. Проводящее кольцо с самоиндукцией L находится в нормальном состоянии во внешнем магнитном поле (магнитный поток через контур кольца равен Φ_0). Затем температура понижается и кольцо переводится в сверхпроводящее состояние. Какой ток будет течь по кольцу, если теперь выключить внешнее магнитное поле?

6.27. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией B находится круглое, недеформируемое, достаточно малого сечения сверхпроводящее кольцо радиуса R. В начальный момент плоскость кольца параллельна направлению магнитного поля, а ток в кольце отсутствует. Определить силу тока в кольце сразу после того, как оно было повернуто так, что плоскость кольца стала перпендикулярна к линиям магнитного поля. Найти затраченную работу.

6.28. В условиях задачи 6.27 определить: 1) каков полный магнитный поток через кольцо после того, как оно было перевернуто; 2) какова величина напряженности магнитного поля в центре кольца; 3) качественно изобразить графически распределение напряженности магнитного поля по линии, совпадающей с диаметром кольца.

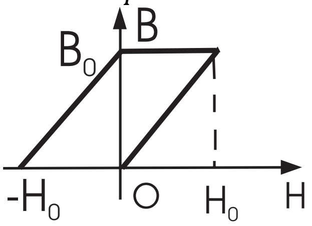
6.29. Сверхпроводящий короткозамкнутый соленоид с током J, имеющий N плотно намотанных витков, длину ℓ, радиус витка a ($\ell \gg a$), растягивают в длину в два раза. Какую работу нужно при этом затратить?

6.30. Внутри бесконечного сверхпроводящего цилиндра радиуса



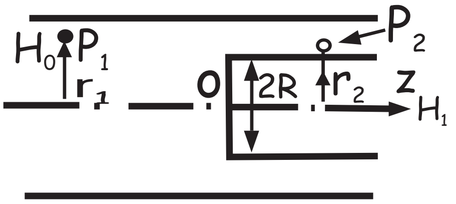
R соосно с первым — другой цилиндр радиуса r, заряженный электрическим зарядом с постоянной объемной плотностью ρ. Внутренний цилиндр завращали с угловой скоростью ω. Найти магнитное поле.

6.31. В длинный сверхпроводящий полый цилиндр радиуса b вста-



вили коаксиально длинный ферромагнитный цилиндр радиуса a с обмоткой для намагничения. Связь между B и H феррита даётся соотношением $B = B_0(1 + H/H_0)$ (см. график). Сначала феррит намагнитили до насыщения, а потом обмотку отключили. Найти индукцию B во всем пространстве: между цилиндрами и внутри феррита.

6.32. Два соленоида с равномерной плотностью намотки — один



бесконечный, другой полубесконечный — вставлены друг в друга соосно (см. рисунок). Найти: а) поле H_2 в точке P_2, расстояние которой от торца внутреннего соленоида много больше его диаметра, если поле на оси равно H_0 при $z \to -\infty$ и H_1 при $z \to +\infty$ ($z = 0$ на торце); б) расстояние от оси при $z \to +\infty$ для силовой линии, проходящей через точку P_1.

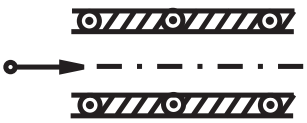
6.33. Медный тонкостенный цилиндр массы m и длины ℓ внесли в однородное магнитное поле параллельное оси цилиндра, после чего за очень короткий интервал времени τ поле быстро увеличили до значения H_1 и выключили. Известно, что цилиндр сжался без разрушения («магнитное обжатие»). Считая цилиндр длинным, а его форму после обжатия цилиндрической, найти поле внутри цилиндра сразу после «обжатия» ($H_1 = 5$ кГс, $H_0 = 1$ кГс, $\tau = 10^{-6}$ с, $m/\ell = 1$ г/см. Силами упругой деформации пренебречь).

6.34. Сверхпроводящий брусок длины ℓ, сечения $S(\ell \gg \sqrt{S})$, плотности ρ, имея начальную скорость v_0, влетает в коротко-замкнутый очень длинный $(L \gg \ell)$ сверхпроводящий соленоид практически того же сечения. Магнитное поле внутри соленоида равно H_0. При какой начальной скорости брусок не пролетит сквозь соленоид?

6.3. Электромагнитная индукция

6.35. По катушке сверхпроводящего соленоида течет постоянный ток J. Катушка совершает малые колебания по закону $\ell = \ell_0 + a\cos\omega t$. При этом на зажимах ее возникает переменное напряжение. Какой амплитуды переменный ток той же частоты ω следует пропустить по катушке, чтобы на ее зажимах возникло такое же напряжение?

6.36. В линейном индукционном ускорителе ЛИУ электроны летят вдоль оси цилиндрического магнитопровода (длина $\ell = 50$ см, внутренний радиус $r_1 = 2$ см, внешний $r_2 = 5$ см). За время $\tau = 10^{-6}$ с индукцию в магнитопроводе изменяют от $B_0 = -5$ кГс до $B_1 = +5$ кГс. Оценить максимальную энергию, набираемую электроном. Ответ выразить в электрон-вольтах (1 эВ $= 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг).

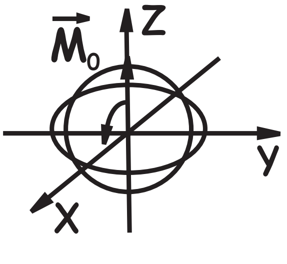


6.37. Горизонтальный стержень веса P и длины ℓ скользит без трения по двум вертикальным стержням, соединенным внизу конденсатором емкости C. Имеется однородное магнитное поле $\vec{B}$ перпендикулярное плоскости падения стержня. Найти ускорение стержня, пренебрегая электрическим сопротивлением образованной цепи (все стержни — проводящие).

6.38. Плоский контур вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле вокруг оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной к полю. Индукция поля равна B. Определить эдс индукции в этом контуре. Площадь, ограниченная контуром, равна S.

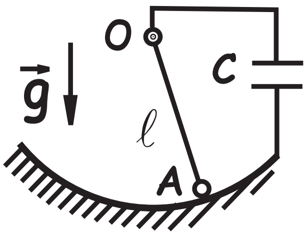
6.39. Стержень ОА вращается с угловой скоростью ω вокруг точки О в плоскости, перпендикулярной к направлению однородного магнитного поля $\vec{M}$. Определить эдс индукции между точками О и А, если длина стержня ℓ.

6.40. Шарообразный радиуса a постоянный магнит с однородным намагничением $\vec{M}_0$ вращается с частотой ω так, что вектор $\vec{M}_0$ вращается в плоскости XZ (см. рисунок). Найти эдс, индуцируемую в кольцевом конту-



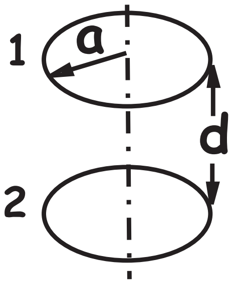
ре радиуса R, лежащем в плоскости X, Y.

6.41. Математический маятник состоит из проводящей нити длиной ℓ, на которой подвешен металлический шарик. Маятник может колебаться в плоскости, перпендикулярной к однородному магнитному полю $\vec{H}$, касаясь при этом проводящей дуги круга. Точка О подвеса маятника и дуга круга соединены электрически с обкладками конденсатора емкости C. Определить период малых колебаний маятника. Сопротивлением проводящего контура и его самоиндукцией пренебречь.



6.42. Круглая проволочная петля радиуса a, находящаяся в постоянном магнитном поле H_0, вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, перпендикулярного $\vec{H}_0$. Найти силу тока в петле, тормозящий момент и среднюю мощность, которая требуется для поддержания вращения. Сопротивление петли — R, индуктивность — L.

6.43. Два проволочных витка радиуса a расположены на расстоянии $d \gg a$ друг от друга. Центры витков лежат на прямой, перпендикулярной плоскостям обоих витков, радиус проволоки b мал по сравнению с радиусом витков ($b \ll a$). Через виток 1 пропускается ток $J(t)$, причем $\dot{J} \ll Jc/d$. Сопротивление витка 2 равно R. Найти силу, действующую на виток 2. Специально рассмотреть случай $R \to 0$.



6.44. Замкнутая катушка из медного провода внесена в однородное поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$ (частота 16 кГц), параллельное оси катушки. Площадь катушки $S = 10$ см^2, число витков $N = 10^2$, индуктивность $L = 10^{-3}$ Гн, сопротивление обмотки $R = 1$ Ом. Найти ток в обмотке и оценить средний магнитный поток через катушку, если напряженность невозмущенного поля $H_0 = 10^3$ Э.

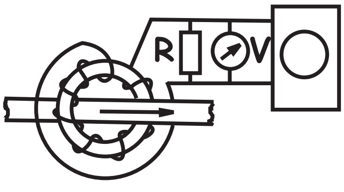
6.45. В однородном магнитном поле индукции $B = 10^{-2}$ Тл находится медное проволочное кольцо индуктивностью $L = 0,6$ мкГн.

Радиус кольца $R = 0,1$ м, радиус кругового сечения проволоки $a = 0,1$ см, удельное сопротивление меди $\rho = 1,75 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости кольца. Кольцо равномерно поворачивают, пока вектор $\vec{B}$ не станет перпендикулярным плоскости кольца. Найти работу, затраченную при повороте кольца, если время поворота равно: а)$\tau = 1$ с; б) $\tau = 10^{-4}$ с.

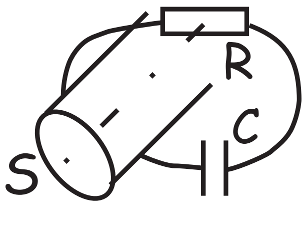
6.46. На непроводящем кольце радиуса R и массы m равномерно распределен заряд q. Кольцо может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент оно покоится. Имеется перпендикулярное плоскости кольца магнитное поле, индукция которого в центральной круговой области радиуса $a < R$ равна $2B_0$, а в остальной области — B_0. Затем всюду магнитное поле равномерно уменьшается до нуля. Какую скорость приобретёт кольцо к моменту исчезновения поля?

6.47. В бетатроне во время ускорения электрона магнитное поле непрерывно нарастает, порождая разгоняющую электрон эдс индукции, а орбита его остается неизменной. Доказать, что для ускорения электрона на орбите постоянного радиуса необходимо, чтобы полный магнитный поток Φ_2, пронизывающий орбиту, был вдвое больше потока Φ_1, который получился бы, если бы поле внутри орбиты было однородно и равно полю на орбите (бетатронное правило $2:1$).

6.48. Вокруг линейного тока $J(t)$, охватывая его N раз, расположен соленоид (число витков на единицу длины — n, поперечная площадь сечения витка — S), внутри которого пропущен обратный виток (см. рисунок; здесь $N = 1$). Найти эдс, наводимую на концах обмотки соленоида (пояс Роговского).

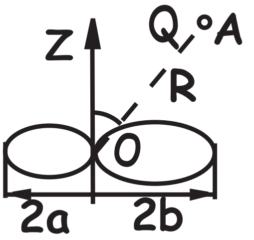


6.49. Петля с сопротивлением R и подсоединенным к ней конденсатором емкостью C (индуктивность петли пренебрежимо мала) охватывает бесконечный цилиндрический соленоид с сечением S. Поле внутри соленоида за время T меняют на противополож-



ное по линейному закону $(\dot{B} = \mathrm{const})$. Найти заряд на конденсаторе сразу же после завершения переворота поля.

6.50. В горизонтальной плоскости лежит проводник. Радиусы колец проводника, образующих "восьмерку", равны a и b. По проводнику течет ток $J = J_0 \sin \omega t$. В точке A на расстоянии R от точки самопересечения проводника расположен неподвижный заряд Q, Найти силу, действующую на этот заряд, $R \gg a, b$ и OA составляет с вертикалью OZ угол θ.



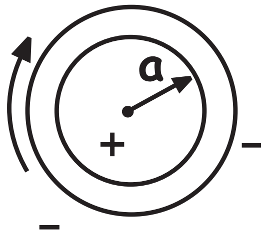
6.51. Скомпенсированный электронный пучок (ток J радиус a) движется соосно внутри заземленного, идеально проводящего цилиндра (радиус b). Под действием собственного магнитного поля пучок радиально равномерно по всей длине сжимается (скорость изменения радиуса v_0). Найти распределение в пространстве продольного электрического поля E_z в некоторый момент времени.

6.52. Найти продольное электрическое поле E_z цилиндрического электронного пучка (радиус a, ток J_0) с компенсированным объемным зарядом, распространяющегося по оси идеально проводящего заземленного цилиндра (радиус b), если ток пучка нарастает во времени.

6.53. Примерно в середине зазора между двумя коаксиальными цилиндрическими соленоидами (числа витков — N_1 и N_2, диаметры — D_1 и D_2, зазор — $\Delta D \ll D_1, D_2$) расположен сверхпроводящий тонкостенный цилиндр. Во внутреннем соленоиде начинает течь ток, и в некоторый момент цилиндр взрывается за время τ. Найти эдс на концах наружного соленоида в этот момент времени. Нарисовать картину магнитных силовых линий до и после взрыва цилиндра.

6.54. Найти скорость вращения ротора асинхронного двигателя в зависимости от нагрузки.

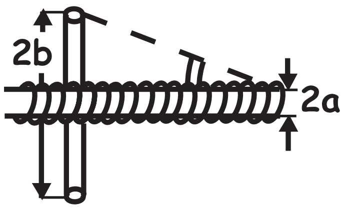
6.55а. Два длинных коаксиальных полых цилиндра заряжены за-



крепленными противоположными по знаку и равными по величине зарядами. Поверхностная плотность зарядов внутреннего цилиндра радиуса a равна $+\sigma$, масса его единицы длины равна μ. Внешний цилиндр закрутили с угловой скоростью ω_-. Найти угловую скорость ω_+ внутреннего цилиндра.

6.55б. Твердый непроводящий диск, равномерно заряженный по поверхности, может свободно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска. Вначале диск покоился. Затем было включено однородное магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t}$, перпендикулярное плоскости диска. Найти движение диска, если его масса — m, а величина заряда на поверхности — q.

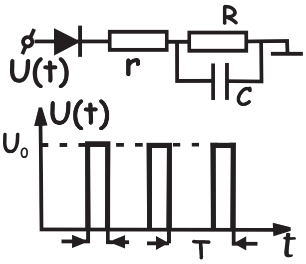
6.56. На полубесконечный соленоид «надето» тонкое проводящее кольцо радиуса b (сопротивление кольца — R, индуктивность — L).



Плоскость кольца перпендикулярна оси соленоида, центр расположен на оси. Положение кольца задается углом θ (см. рисунок). Найти среднюю за период силу, действующую на кольцо, если магнитное поле в соленоиде (далеко от конца) $H(t) = H_0 e^{i\omega t}$ и радиус соленоида $a \ll b$.

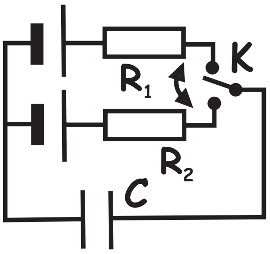
6.4. Цепи переменного тока. Трансформаторы. Длинные линии

6.57. На схему подаются периодические прямоугольные импульсы



напряжения. Длительность импульсов — τ, период повторения импульсов — T (см. рисунок). В течение периода напряжение на конденсаторе изменяется очень мало. Найти установившееся через очень много периодов напряжение на конденсаторе.

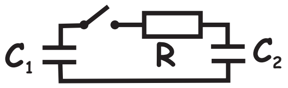
6.58. Ключ K замыкают поочередно с каждым из контактов,



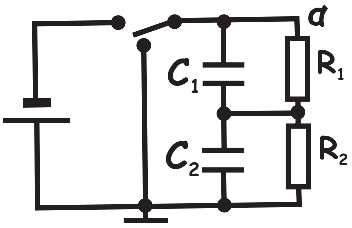
на очень маленькие одинаковые промежутки времени, причем изменение заряда конденсатора за время каждого включения мало. Какой заряд окажется на конденсаторе после очень большого числа переключений?

6.59. Рассчитать процесс зарядки реального конденсатора (с утечкой).

6.60. Рассмотреть разрядку конденсатора C_1 на конденсаторе C_2.

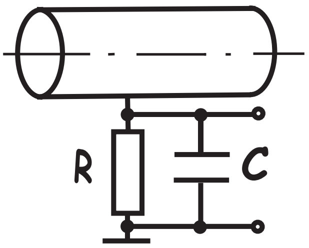


6.61. Два последовательно соединенных конденсатора с утечками



подключены к источнику высокого напряжения. Затем конденсаторы отключаются от источника, заземляются на короткое время, после чего отсоединяются от "земли". Найти напряжение в точке a.

6.62. Тонкий (цилиндрический) пучок электронов в течение вре-

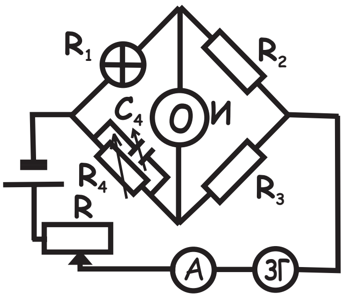


мени τ пронизывает полый цилиндр вдоль его оси. Найти зависимость потенциала цилиндра от времени $U(t)$, если он заземлен через RC-цепочку. Рассмотреть случаи: а) $\tau \gg RC$; б) $\tau \ll RC$. Пучок очень длинный $(\ell/v \ll \tau)$.

6.63. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и емкости C, прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$ при $0 \le t \le T$ и $U_1(t) = 0$ при $t < 0$, $t > T$. Найти напряжение на сопротивлении R. При каких условиях оно $\sim dU/dt$(дифференцирующая цепочка)?

6.64. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L, прикладывается прямоугольный импульс напряжения $U_1(t) = U_0$ при $0 \le t \le T$ и $U_1(t) = 0$ при $t < 0$, $t > T$. Найти напряжение на сопротивлении R. При каких условиях оно $\sim \int U dt$(интегрирующая цепочка)?

6.65. При измерении теплоёмкости C образца (нить лампочки



накаливания) модуляционным методом используется мост переменного тока, в одно из плечей которого вставлен испытываемый образец R_1, а в другое для уравновешивания амплитуды и фазы — сопротивление R_4 и шунтирующая его емкость C_4. Ток, питающий мост, равен $J = J_0 + J_1 \sin \omega t$, $(J_0 \gg J_1)$, где постоянная составляющая J_0 регулируется реостатом R, а переменная — звуковым генератором (ЗГ). При этом сопротивление образца и его температура T изменяются по такому же закону, но со сдвигом $\Delta\varphi$ по фазе так, что

$$mC = \frac{2J_0 J_1 R_1}{\omega \Delta T} \sin \Delta\varphi,$$

где m — масса образца, а ΔT — амплитуда колебаний его температуры. Показать, что электрический импеданс образца для переменной составляющей тока равен

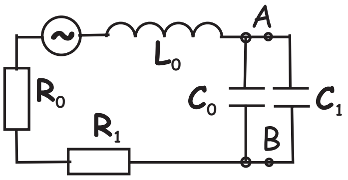
$$Z = R + \frac{J_0}{J_1}\frac{dR_1}{dT}\Delta T \cos\Delta\varphi - i\frac{J_0}{J_1}\frac{dR_1}{dT}\Delta T \sin\Delta\varphi.$$

Определить величину mC для образца, если выполнены условия

$$\frac{J_0}{J_1}\frac{dR_1}{dT}\Delta T \cos\Delta\varphi \ll R_1, \quad \omega^2 R_1^2 C^2 \ll 1$$

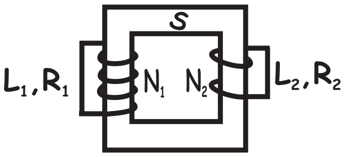
и мост находится в равновесии (по амплитуде и фазе).

6.66. Для измерения тока «неконтактным» способом с помощью



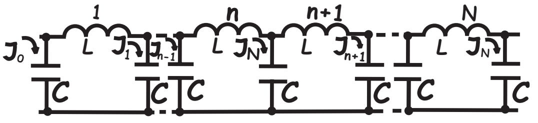
пояса Роговского (см. задачу 6.48) собрана измерительная схема, эквивалент которой показан на рисунке (R_0, L_0, C_0 — параметры собственно пояса, $\mathcal{E}$ - эдс, наводимая на концах обмотки пояса). При каком выборе R_1 и C_1 напряжение в точках A, B пропорционально измеряемому току. Чему оно будет равно при $C_1 = 0$?

6.67. На магнитопровод (сечение — S, длина — ℓ, магнитная



проницаемость — μ) надеты две обмотки (числа витков — N_1, N_2, индуктивности — L_1, L_2), находящиеся в сверхпроводящем состоянии, при этом только во второй из них течет ток J. В момент $t = 0$ ее переводят в обычное состояние (сопротивление R). Найти ток в первой обмотке, пренебрегая полями рассеяния.

6.68. Электрическая цепь (искусственная длинная линия) состоит



из N одинаковых звеньев $(N \gg 1)$ разомкнута на концах. Найти частоты собственных колебаний этой системы.

6.69. Из рассмотрения искусственной длинной линии с сосредоточенными параметрами (задача 6.68) получить путем предельного перехода дифференциальное уравнение для тока в длинной цепи с равномерно распределенными параметрами.

6.70. Идеальная длинная линия с распределенными параметрами длиной ℓ разомкнута на концах. Определить спектр собственных колебаний такой системы. Сравнить его со спектром линии с сосредоточенными параметрами (задача 6.68).

6.71. Найти закон распределения вдоль линии амплитуд токов J_x и напряжений U_x для собственных колебаний в двухпроводной линии длиной ℓ, а также частоты собственных колебаний. Концы линии: а) разомкнуты; б) замкнуты накоротко; в) один конец замкнут, другой разомкнут. Потерями пренебречь.

6.72. Найти волновое сопротивление ρ двухпроводной линии без потерь, провода которой имеют диаметр $2r = 4$ мм и расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. (Волновым сопротивлением линии называется отношение амплитуды напряжения волны, бегущей в линии, к амплитуде тока этой волны.)

6.73. Найти волновое сопротивление ρ воздушной коаксиальной линии без потерь, жила которой имеет диаметр $2r = 8$ мм, а оплетка $2R = 40$ мм. (Определение волнового сопротивления линии см. в

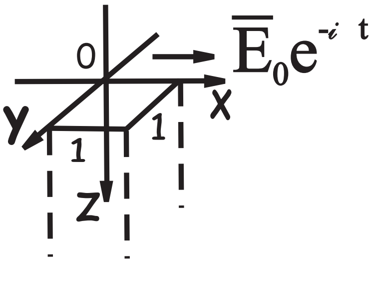
задаче 6.72.)

6.74. Найти входное сопротивление двухпроводной линии без потерь на частоте $\nu = 5 \cdot 10^7$ Гц, если провода линии имеют диаметр $2r = 2$ мм и расположены на расстоянии $d = 12$ мм. Конец линии разомкнут, а ее длина равна: 1) $\ell_1 = 2$ м; 2) $\ell_2 = 3$ м; 3) $\ell_3 = 3,5$ м; 4) $\ell_4 = 7,5$ м. Определить, каков характер входного сопротивления - емкостной или индуктивный (входное сопротивление линии для данной частоты есть отношение между амплитудами напряжения и силы тока, устанавливающимися на входе линии, питаемой переменной эдс данной частоты).

6.5. Скин-эффект

6.75. Показать, что на границе с проводником отношение нормальной компоненты магнитного поля к тангенциальной есть величина такого же порядка малости, что и отношение глубины проникновения к длине волны переменного поля.

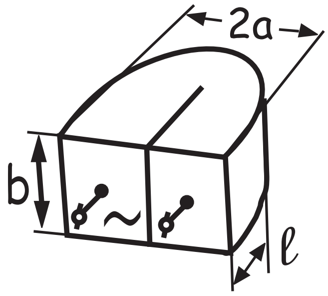
6.76. Полупространство $Z \geq 0$ заполнено проводником с проводимостью σ магнитной проницаемостью μ. Параллельно плоскости $Z = 0$ имеется электрическое поле $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$. Найти: а) поле в полупространстве; б) среднюю за период мощность $\overline{W} = \int_0^\infty \overline{(\vec{j}\vec{E})} dz$, выделяющуюся в бесконечном столбике от нуля до ∞ по Z и с единичной площадью сечения (1×1).



6.77. Полупространство $Z \geq 0$ заполнено проводником с проводимостью σ. Параллельно плоскости $Z = 0$ включено переменное электрическое поле, представляющее собой сумму двух полей с разными амплитудами E_0 и E_1. Частоты различаются на порядок ω и 10ω соответственно. Найти среднюю за большой период мощность $\overline{W}$, выделяющуюся в бесконечном столбике по Z от нуля до бесконечности с

единичной площадью сечения.

6.78. Покрытая тонким изолирующим покрытием металлическая



пластина толщины a, ширины b, длины 2ℓ $(a \ll b, \ell)$ и проводимостью σ сложена вдвое (см. рисунок). Найти активное сопротивление пластины переменному току частоты ω в случае сильного скин-эффекта.

6.79. Найти активное сопротивление тонкого цилиндрического проводника (длина — ℓ, радиус — a, проводимость — σ; $\mu = 1$) в предельных случаях слабого и сильного скин-эффекта.

6.80. Над полупространством с очень низкой проводимостью σ на расстоянии a от него идет линейный переменный ток частоты ω. Оценить сопротивление тока на единицу длины, полагая глубину скин-слоя $\delta \ll a$.

6.81. Широкая плита с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ, ограниченная плоскостями $x = \pm h$, обмотана проводом, по которому течет ток $J = J_0 e^{-i\omega t}$. Провод тонкий, число витков на единицу длины n, витки намотаны параллельно друг другу. Пренебрегая краевыми эффектами, определить вещественную амплитуду магнитного поля внутри плиты. Исследовать предельные случаи слабого $(\delta \gg h)$ и сильного $(\delta \ll h)$ скин-эффекта.

6.82. Металлический шар радиуса a проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ помещен в однородное переменное магнитное поле $H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Считая частоту малой, найти в первом неисчезающем приближении распределение вихревых токов в шаре и среднюю поглощаемую им мощность.

6.83. Металлический шар помещен в однородное магнитное поле, меняющееся с частотой ω. Найти результирующее поле и среднюю поглощаемую шаром мощность при больших частотах. Радиус шара — a, магнитная проницаемость — μ, проводимость — σ. *Указание.* При определении поля вне шара считать, что внутри шара поле равно нулю

(т. е. пренебречь глубиной проникновения δ по сравнению с радиусом шара a). При определении поля внутри шара, считать его поверхность плоской.

6.84. Металлические шарики равномерно распределены в диэлектрике. Включено однородное магнитное поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$. Во сколько раз изменится количество тепла, выделяющееся в единице объема, если имеющиеся шарики измельчены $(R = R_0/n)$ и вновь равномерно размешаны в диэлектрике? Результат найти для случая слабого и сильного скин-эффекта.

6.85. Найти среднюю магнитную проницаемость среды, представляющую собой «газ» из металлических шариков радиуса a, их число в единице объема n. Проводимость металла — σ, магнитная проницаемость — μ. Рассмотреть предельные случаи больших и малых частот ω, когда: а) толщина скин-слоя много меньше a; б) много больше a.

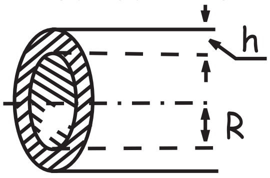
6.86. Два медных шарика радиусами a, проводимостью σ помещены на расстоянии $r \gg a$ друг от друга в переменное однородное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t}$, $(\vec{H} \perp \vec{r}$, $\omega \ll c^2/2\pi\sigma a^2)$. Оценить силу их взаимодействия.

6.87. По горизонтально расположенному кольцу радиуса $r_0 = 1$ см течет переменный ток $J = J_0 e^{-i\omega t}$. Над кольцом на его оси свободно повис медный шарик на высоте $h = 10r_0$ (плотность меди $\rho = 9$ г/см^3). Диаметр шарика $d = r_0/2$, частота $\omega \gg c^2/(\sigma d^2)$. Найти величину J тока в кольце.

6.88. Бесконечный полый цилиндр, у которого внутренний радиус — a, толщина стенки — $h (h \ll a)$, находится в однородном продольном магнитном поле $H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Найти амплитуду магнитного поля в полости и ее зависимость от ω. Указание. Так как $h \ll a$, то при определении поля в толще оболочки можно считать ее плоской.

6.89. Полый медный цилиндр помещен в однородное магнитное поле, параллельное его оси. Поле быстро выключают. Описать изменение поля во времени внутри цилиндра. Что значит быстро?

6.90. Тонкий бесконечный цилиндр с толщиной стенки



h, радиусом R $(h \ll R)$ находится в продольном внешнем магнитном поле $\vec{H} = \vec{H}_0 \sin \omega t$. Внутри цилиндра — феррит с магнитной проницаемостью μ. Найти амплитуду в феррите.

6.91. В однородном магнитном поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$ находится бесконечная труба с радиусами стенок R и r $(R - r \ll r)$, изготовленная из материала с проводимостью σ $(\mu = 1)$. Внутри нее — сверхпроводник. Ось трубы параллельна полю. Найти магнитное поле внутри металла трубы.

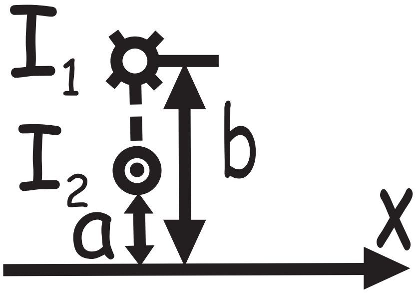
6.92. Бесконечный проводящий цилиндр с проводимостью σ внесли во внешнее однородное переменное магнитное поле $H = H_0\, e^{-i\omega t}$ так, что его ось перпендикулярна магнитному полю. Найти поле во всем пространстве в случаях: а) слабого; б) сильного скин-эффекта. Магнитная проницаемость цилиндра $\mu = 1$.

6.93. Бесконечный полый цилиндр внесли во внешнее однородное переменное магнитное поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$, ось которого перпендикулярна магнитному полю. Найти поле внутри цилиндра (проводимость — σ, магнитная проницаемость $\mu = 1$) при сильном скин-эффекте.

6.94. Металлический сплошной цилиндр помещают в переменное магнитное поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$ первый раз так, что ось цилиндра перпендикулярна полю, второй раз так, что ось параллельна полю. В случае сильного скин-эфекта найти отношение мощностей выделяющихся в цилиндре (магнитная проницаемость $\mu = 1$).

6.95. Проводящий диск радиуса a и толщины h внесли в переменное однородное магнитное поле так, что ось диска параллельна магнитному полю. Оценить поле на поверхности диска вблизи его оси в случае слабого скин-эффекта $(h \ll \delta)$.

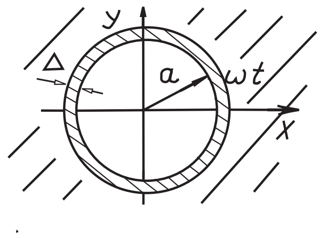
6.96. По двум бесконечно длинным и тонким проводникам,



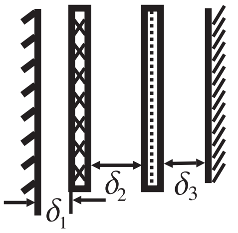
расположенным над проводящей плоскостью с проводимостью σ, текут равные и противоположно направленные токи $J_1 = -J_2 = J_0 \cos \omega t$. В случае сильного скин-эффекта найти распределение плотности индуцированного тока $\vec{j}(x)$.

6.97. Сферический тонкостенный проводящий экран (радиус — a, толщина стенок — $h \ll a$, проводимость — σ) помещен в переменное однородное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t}$. Оценить магнитное поле внутри экрана в случае слабого скин-эффекта $(h \ll \delta)$.

6.98. Найти суммарный момент сил, действующих на неподвижный тонкостенный шар радиуса a (толщина стенки равна Δ, проводимость материала — σ, $(\mu = 1)$), во вращающемся с угловой скоростью ω однородном магнитном поле. Вращающееся поле можно представить в виде суперпозиции $\vec{H} = H_0(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)e^{i\omega t}$. Задачу решить в приближении слабого скин-эффекта.

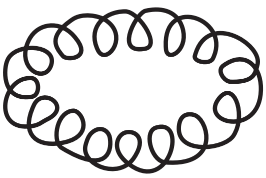


6.99. В случае сильного скин-эффекта оценить индуктивность на единицу длины бесконечной линии, сечение которой показано на рисунке. (Толщиной проводников пренебречь.) Ширина проводника 10 см, $\delta_1 = 1$ мм, $\delta_2 = 2$ мм, $\delta_3 = 3$ мм.



6.100. В однородное переменное магнитное поле $\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\omega t}$ внесли короткозамкнутый виток (проводимость σ), в форме прямоугольного короба (толщина стенки — d, поперечное сечение — $a \times b$, высота — h; $h,\ b \gg a > 2d$). Найти поле внутри витка, если $\vec{H}$ параллельно его высоте. Краевыми эффектами пренебречь.

6.101. Многослойный с полной толщиной слоя d короткозамкнутый тороидальный соленоид со средним малым радиусом сечения a изготовлен из проволоки с удельным сопротивлением ρ. Найти



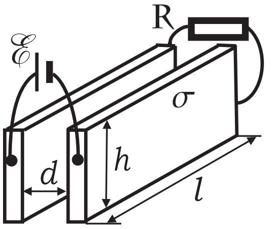
параметры, при которых ток в соленоиде пропорционален переменному (с характерным временем τ) току в витке, расположенном по оси тороидального соленоида.

6.6. Поток энергии. Ток смещения

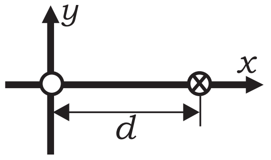
6.102. По цилиндрическому проводнику радиуса a и длины $\ell \gg a$ течет равномерно распределенный по сечению ток J. Показать, что выделяющееся в проводнике джоулево тепло равно энергии электромагнитного поля, которая поступает в проводник извне.

6.103. Найти энергию, которую несет с собой электромагнитное поле, распространяющееся вдоль воздушного коаксиального кабеля без потерь. Показать, что энергия, протекающая за единицу времени через сечение кабеля, равна мощности, которую отдает источник, питающий кабель.

6.104. По двум плоским параллельным шинам с конечной проводимостью мощность источника передается в нагрузку. Описать картину полей и потока энергии, пренебрегая рассеянными полями на краях; $\mathcal{E} = \mathrm{const}$.



6.105. По двухпроводной линии постоянного тока передается мощность P при напряжении U и токе J. Пренебрегая сопротивлением проводов, найти распределение вектора Пойнтинга на прямой, соединяющей оси проводов.



6.106. Показать, что при разрядке плоского цилиндрического и сферического конденсаторов на их обкладках ток проводимости совпадает с током смещения.

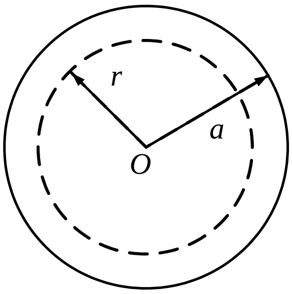
6.107. Найти плотность тока смещения $\vec{j}_{\text{см}}$ в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью u, оставаясь параллельными друг другу, если: 1) заряды Q на пластинах остаются посто-

янными; 2) разность потенциалов U между пластинами остается постоянной, расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин; 3) что изменится, если пластины конденсатора будут сближаться, а не раздвигаться?

6.7. Решение типичных задач

Р.49. Вычислить внутреннюю часть самоиндукции единицы длины прямолинейного провода круглого сечения радиуса a. Магнитная проницаемость провода равна μ.

Предположим, что по проводнику течет постоянный ток J. Он создает магнитное поле. Это поле можно найти, воспользовавшись теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$:



$$\oint H_l\, dl = \frac{4\pi}{c} \int\limits_S (\vec{j}\, d\vec{s}), \qquad (1)$$

где $\vec{j}$ — плотность тока. Ввиду аксиальной симметрии напряженность магнитного поля зависит только от расстояния до оси провода и имеет только α-ю составляющую H_α в цилиндрической системе координат (z , r , α) с осью Z по оси тока. Поэтому, взяв циркуляцию вектора $\vec{H}$ по окружности радиуса $r < a$ с центром на оси провода, найдем

$$\oint H_l\, dl = H_\alpha \cdot 2\pi r\,.$$

Поскольку $j = \mathrm{const}$, то правая часть уравнения (1)

$$\frac{4\pi}{c} \int\limits_S (\vec{j}\, d\vec{s}) = \frac{4\pi}{c} j \cdot \pi r^2 = \frac{4\pi}{c} \frac{J}{a^2} r^2\,.$$

Окончательно находим

$$H_\alpha = \frac{2J}{ca^2} r \qquad \text{при} \qquad r \le a\,.$$

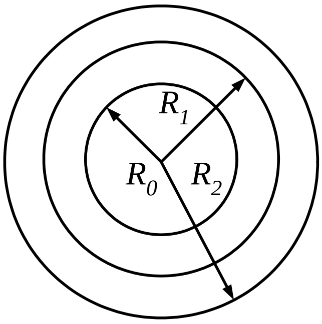
Зная распределение напряженности магнитного поля $\vec{H}$, находим энергию магнитного поля, запасенную внутри единицы длины провода. Она равна

$$W = \frac{1}{8\pi}\int(\vec{B}\,\vec{H})\,dv = \frac{\mu}{8\pi}\int H^2\,dv = \frac{\mu J^2}{4c^2}\,. \qquad (2)$$

Здесь интеграл берется по объему проводника, и учтено, что $\vec{B} = \mu\vec{H}$. С другой стороны, магнитная энергия $W = LJ^2/2c^2$. Сравнивая с (2), находим $L = \mu/2$.

Р.50. Вычислить самоиндукцию единицы длины коаксиального кабеля, жила которого имеет радиус R_0, а оболочка — внутренний радиус — R_1, наружный — R_2. Магнитная проницаемость проводов μ_1, изоляции между ними — μ_2.

В коаксиальном кабеле ток течет по центральной жиле радиуса R_0 и возвращается по оболочке, внутренний и внешний радиусы которой равны R_1 и R_2. Пусть в кабеле течет ток J. Тогда магнитное поле внутри центральной жилы равно (см. Р.49):



$$H_\alpha = \frac{2J}{cR_0^2}\,r \qquad \text{при} \qquad r \le R_0\,.$$

Ввиду аксиальной симметрии проводников напряженность магнитного поля также обладает аксиальной симметрией. Применяя теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$ (см. Р.49), находим, что для:

1) $R_0 \le r \le R_1$

$$H_\alpha \cdot 2\pi r = 4\pi J/c,$$

откуда

$$H_\alpha = \frac{2J}{c\,r}\,;$$

2) $R_1 \le r \le R_2$

$$H_\alpha \cdot 2\pi r = \frac{4\pi J}{c} - \frac{4\pi J}{c}\,\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

откуда

$$H_\alpha = \frac{2J}{c\,r}\,\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{2Jr}{c\,(R_2^2 - R_1^2)}\,.$$

При $r > R_2$ $H = 0$. Энергия, запасенная в единице длины кабеля:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int(\vec{B}\,\vec{H})\,dv = \frac{\mu_1 J^2}{4c^2} + \frac{\mu_2}{8\pi}\int\limits_{R_0}^{R_1}\left(\frac{2J}{cr}\right)^2 2\pi r\,dr +$$

$$+\frac{\mu_1}{8\pi}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{(2J)^2}{c^2(R_2^2 - R_1^2)^2}\left(\frac{R_2^2}{r} - r\right)^2 2\pi r\,dr =$$

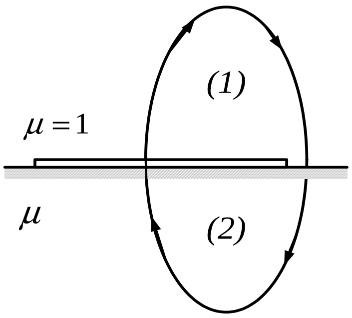
$$= \frac{\mu_2 J^2}{c^2}\ln\frac{R_1}{R_0} + \frac{\mu_1 J^2 R_2^4 \ln(R_2/R_1)}{c^2(R_2^2 - R_1^2)^2} - \frac{\mu_1 J^2 R_2^2}{2c^2(R_2^2 - R_1^2)},$$

где $\vec{B} = \mu\vec{H}$. С другой стороны, $W = LJ^2/2c^2$, где L — индуктивность единицы длины кабеля. Сравнивая энергии, получаем для коэффициента самоиндукции выражение

$$L = 2\mu_2\ln\frac{R_1}{R_0} + \frac{2\mu_1 R_2^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2}\ln\frac{R_2}{R_1} - \frac{\mu_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\,.$$

Р.51. Самоиндукция плоского контура в воздухе ($\mu = 1$) равна L. Найти самоиндукцию контура, если его положить на плоскую границу полупространства, заполненного однородным магнетиком с магнитной проницаемостью μ.

Для плоского контура $\Phi = LJ/c$, где Φ — поток вектора магнитной индукции через контур; J — ток в контуре; L — индуктив-



ность контура. Пусть $\vec{H}_0$ — поле в отсутствии магнетика. Предположим, что при наличии магнетика поле в пустом полупространстве стало $\vec{H}_1 = a\vec{H}_0$, а в среде — $\vec{H}_2 = b\vec{H}_0$. Поле $\vec{H}_0$ перпендикулярно плоскости контура и симметрично относительно него.

Из непрерывности нормальной составляющей вектора $\vec{B}_0$ следует, что $a = \mu b$, непрерывность тангенциальной составляющей обеспечивается автоматически $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. Возьмем циркуляцию вектора $\vec{H}_0$ в отсутствии среды по некоторой силовой линии

$$\oint (\vec{H}_0\, d\vec{l}) = 2 \int\limits_{(1)} (\vec{H}_0\, d\vec{l}) = \frac{4\pi J}{c}\,,$$

где $2 \int\limits_{(1)} (\vec{H}_0\, d\vec{l})$ взят по половине симметричной кривой. С другой стороны, при наличии магнетика интеграл по той же самой кривой дает

$$\frac{4\pi J}{c} = \int\limits_{(1)} (\vec{H}_1\, d\vec{l}) + \int\limits_{(2)} (\vec{H}_2\, d\vec{l}) =$$

$$= \mu b \int\limits_{(1)} (\vec{H}_0\, d\vec{l}) + b \int\limits_{(2)} (\vec{H}_0\, d\vec{l}) = b(\mu + 1) \int\limits_{(1)} (\vec{H}_0 \cdot d\vec{l})\,.$$

Сравнивая, получаем

$$b = \frac{2}{\mu + 1}\,, \qquad a = \frac{2\mu}{\mu + 1},$$

и, значит,

$$\vec{H}_1 = \frac{2\mu}{\mu + 1}\,\vec{H}_0\,, \qquad \vec{H}_2 = \frac{2}{\mu + 1}\,\vec{H}_0\,.$$

Поток вектора индукции через площадь контура в отсутствие маг-

нетика равен $\Phi = \int (\vec{H}_0 \cdot d\vec{s})$. При наличии магнетика

$$\Phi = \int \frac{2\mu}{\mu+1}(\vec{H}_0\, d\vec{s}) = \frac{2\mu}{\mu+1}\,\Phi_0\,,$$

а поскольку $\Phi = LJ/c$, то

$$L = \frac{2\mu}{\mu+1}\,L_0.$$

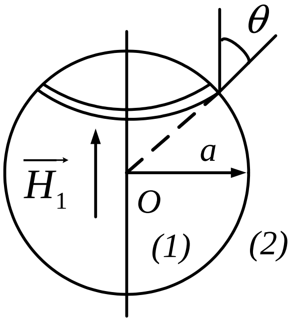
Р.52. Найти индуктивность соленоида с числом витков $N \gg 1$, намотанного тонким слоем на шарообразный сердечник радиуса a с магнитной проницаемостью μ так, что витки лежат вдоль линий $\theta = \text{const}$, а плотность намотки меняется по закону

$$n(\theta) = \frac{N}{2a}\sin\theta\,, \qquad \left(\int\limits_0^\pi n(\theta)\,a\,d\theta = N\right).$$

Поле $\vec{H}_2$ вне соленоида — поле магнитного диполя, магнитный момент $\vec{m}$ которого создается соленоидом (поверхностные токи) и индуцированным моментом шара

$$\vec{H}_2 = \frac{3\vec{r}(\vec{m}\,\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\,.$$

Направление вектора $\vec{m}$ перпендикулярно плоскостям витков. Поле



$\vec{H}_1$ внутри шара однородно, также как для намагниченного шара (см. Р.47). Тангенциальные составляющие H_τ на поверхности шара терпят разрыв из-за поверхностных токов, нормальные составляющие вектора магнитной индукции непрерывны, поэтому

$$\frac{m}{a^3}\sin\theta + H_1\sin\theta = \frac{4\pi}{c}\frac{JN}{2a}\sin\theta\,,$$

$$\mu H_1 \cos\theta = \frac{3m\cos\theta}{a^3} - \frac{m\cos\theta}{a^3} = \frac{2m\cos\theta}{a^3}\,.$$

Решая приведенную выше систему уравнений, находим

$$H_1 = \frac{4\pi NJ}{c\,(\mu+2)a}\,.$$

Поток вектора магнитной индукции через dn витков, расположенных под углом θ, равен

$$d\Phi = \mu H\pi a^2 \sin^2\theta\, n(\theta)\, a\, d\theta\,.$$

Полный поток через все N витков

$$\Phi = \frac{2\pi^2 N^2 Ja}{c}\,\frac{\mu}{\mu+2}\int\limits_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{8\pi^2N^2Ja\mu}{3c\,(\mu+2)}\,.$$

Значит,

$$L = \frac{8\pi^2}{3}\,\frac{\mu}{\mu+2}\,N^2 a\,.$$

Вычисление индуктивности через энергию системы в данном случае заметно сложнее из-за трудности вычисления энергии вне соленоида:

$$\frac{LJ^2}{2c^2} = W_1 + W_2,$$

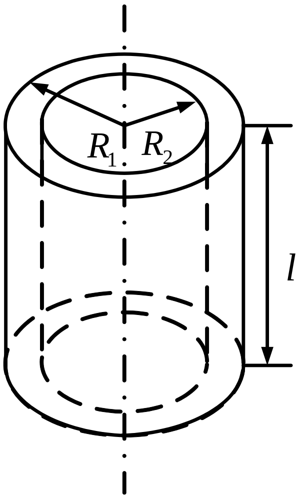
где $W_1 = \mu H_1^2 \frac{4}{3}\pi a^3$ есть энергия внутри соленоида с учетом однородности поля $\vec{H}_1$; а энергия вне соленоида

$$W_2 = \frac{1}{8\pi}\int H_2^2\, dv\,,$$

где

$$\vec{H}_2 = \frac{3\vec{r}(\vec{m}\,\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\,, \qquad m = m_z = \frac{2\pi JNa^2}{c(\mu+2)}.$$

P.53. Внутрь соленоида, имеющего N_1 витков, длину l и площадь



сечения S_1, вставлен коаксиально второй соленоид с тем же направлением намотки и той же длины l, но с числом витков N_2 и площадью сечения S_2 ($l \gg \sqrt{S_1}, \sqrt{S_2}$). Края соленоидов совпадают. Обмотки соединены последовательно так, что токи в обоих соленоидах текут в одинаковых направлениях. Пренебрегая индуктивностью, возникающей из-за присутствия провода, соединяющего оба соленоида, находим индуктивность системы:

а) через энергию;

б) через потокосцепление.

Если по соленоидам пропустить ток J, то распределение напряженности магнитного поля будет иметь вид

$$H_1 = \frac{4\pi J}{c}\frac{N_1}{l} \qquad \text{при} \qquad R_2 \le R \le R_1\,,$$

$$H_2 = \frac{4\pi J}{c}\frac{N_1}{l} + \frac{4\pi J}{c}\frac{N_2}{l} = \frac{4\pi J}{c}\frac{(N_1+N_2)}{l} \qquad \text{при} \qquad R < R_2\,,$$

$$H_3 = 0 \qquad \text{при} \qquad R > R_1\,.$$

а) Найдем магнитную энергию, запасенную в системе:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int H^2\,dv = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{4\pi J}{c\,l}\right)^2\Big[(N_1+N_2)^2 S_2 l + N_1^2(S_1-S_2)l\Big] = \tag{1}$$

$$= \frac{2\pi J^2}{c^2 l}(N_1^2 S_1 + N_2^2 S_2 + 2N_1 N_2 S_2)\,.$$

С другой стороны, $W = LJ^2/2c^2$, где L — индуктивность системы. Сравнивая, находим

$$L = \frac{4\pi}{l}(N_1^2 S_1 + N_2^2 S_2 + 2N_1 N_2 S_2)\,. \tag{2}$$

б) Учтя потокосцепления для внутреннего соленоида, имеем

$$\Phi_2 = \frac{4\pi J}{c\,l}(N_1 + N_2)N_2S_2 \,.$$

С учетом потокосцепления для внешнего соленоида получаем

$$\Phi_1 = \frac{4\pi J}{c\,l}(N_1{+}N_2)N_1S_2{+}\frac{4\pi J}{c\,l}(S_1{-}S_2)N_1^2 = \frac{4\pi J}{c\,l}(N_1N_2S_2{+}N_1^2S_1)\,.$$

Для всей системы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{4\pi J}{c\,l}(N_1^2S_1 + N_2^2S_2 + 2N_1N_2S_2).$$

Сравнивая с $\Phi = LJ/c$, находим для индуктивности прежний результат (2).

P.54. Горизонтальный стержень веса mg и длины l скользит без трения по двум вертикальным стержням, соединенным внизу конденсатором емкости C. Имеется однородное магнитное поле $\vec{B}$, перпендикулярное плоскости падения стержня. Найти ускорение стержня, пренебрегая электрическим сопротивлением образованной цепи (все стержни проводящие).

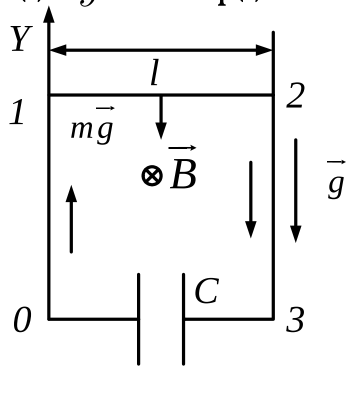
Направление вектора $\vec{B}$ выбрано от читателя. Магнитный поток сквозь замкнутый контур 01230 будет меняться из-за изменения площади контура. Возникающая в контуре эдс индукции равна

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{1}{c}lB\dot{y},$$

поскольку

$$\Phi = Bly\,,$$

где y — координата горизонтального стержня. Начало координат вы-



брано на уровне конденсатора. По контуру течет ток, как показано на рисунке, так как в контуре действует эдс. При вычислении эдс мы пренебрегли магнитным полем, создаваемым этим током. По второму закону Кирхгофа сумма падений напряжений по замкнутому

контуру равна сумме эдс, действующих в контуре. Поэтому падение напряжения на емкости $U_c = \mathcal{E}$. С другой стороны, $U_c = Q/C$, где Q — заряд конденсатора, а C — емкость конденсатора. Значит,

$$Q = -\frac{lB\dot{y}C}{c}\,. \tag{3}$$

Составим уравнение движения стержня (второй закон Ньютона). На стержень действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз (противоположно положительному y), и сила Лоренца, направленная вверх. Поэтому

$$m\ddot{y} = -mg + \frac{JBl}{c}\,,$$

где g — ускорение свободного падения; J — ток в контуре; $\ddot{y}$ — ускорение стержня. Дифференцируя уравнение (1) и учитывая, что $J = \dfrac{dQ}{dt}$, окончательно получаем

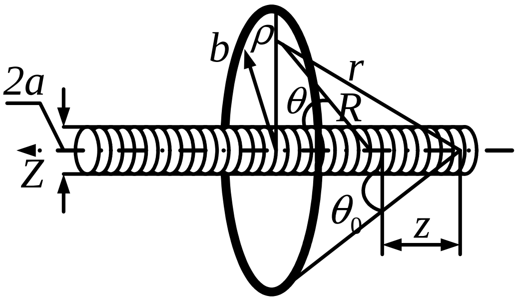
$$\ddot{y} = -\frac{g}{1 + \dfrac{l^2B^2C}{mc^2}}\,.$$

Р.55. На полубесконечный соленоид «надето» тонкое проводящее кольцо радиуса b (сопротивление кольца R, индуктивность L). Плоскость кольца перпендикулярна оси соленоида, центр расположен на оси. Положение кольца задается углом θ (см. рисунок). Найти среднюю за период силу, действующую на кольцо, если магнитное поле в соленоиде (далеко от кольца) $H(t) = H_0(t)\exp(-i\omega t)$ и радиус соленоида $a \ll b$.

По кольцу течет ток, так как переменным магнитным полем соленоида в нем наводится электродвижущая сила (эдс индукции)

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,, \tag{1}$$

где $\Phi = \int (\vec{B}\, d\vec{s})$ — магнитный поток сквозь кольцо. Интеграл берется по плоскости кольца. Введем цилиндрическую систему коор-



динат с осью Z вдоль соленоида и с началом координат в начале соленоида. Из симметрии системы ясно, что магнитная индукция $\vec{B}$ в плоскости кольца может зависеть только от ρ и имеет проекции B_z и B_ρ. Поскольку радиус кольца $b \gg a$, то поле $\vec{B}$ для $\rho \gg a$ можно найти как сумму полей $\vec{B}_m$, создаваемых магнитными моментами $\vec{m}$ витков соленоида на больших расстояниях

$$\vec{B}_m = \frac{3\vec{R}(\vec{m}\,\vec{R})}{R^5} - \frac{\vec{m}}{R^3}\,. \tag{2}$$

где $\vec{m} = \frac{\pi a^2}{c} J_0\,\vec{n}_z$; J_0 — ток, текущий по соленоиду; $\vec{n}_z$ — единичный вектор вдоль Z. Проекция на ρ вектора магнитной индукции, создаваемого $n\,dz$ витками, расположенными на расстоянии z от начала соленоида, равна $dB_\rho = B_{m\rho} n\,dz$, где $B_{m\rho}$ — ρ-я проекция от одного витка. Из уравнения (2) находим

$$B_{m\rho} = \frac{3m}{R^3}\cos\theta\sin\theta\,.$$

Подставляя в это выражение

$$\cos\theta = \frac{1}{R}(b\,\operatorname{ctg}\theta_0 - z)\,, \sin\theta = \frac{\rho}{R}\,, R = \sqrt{\rho^2 + (b\,\operatorname{ctg}\theta_0 - z)^2}$$

и интегрируя по z dB_ρ, получаем

$$B_\rho = 3mn\int\limits_0^\infty \frac{(b\,\operatorname{ctg}\theta_0 - z)\,dz}{\left(\rho^2 + (b\,\operatorname{ctg}\theta_0 - z)^2\right)^{5/2}} = -\frac{mn\rho}{(\rho^2 + b^2\,\operatorname{ctg}^2\theta_0)^{3/2}}\,.$$

Вычисляя подобным образом B_z, находим, что

$$B_z = mn \int\limits_0^\infty \frac{2(b\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)^2 - \rho^2}{\left(\rho^2 + (b\,\mathrm{ctg}\,\theta_0 - z)^2\right)^{5/2}}\,dz = -\frac{mnb\,\mathrm{ctg}\,\theta_0}{(\rho^2 + b^2\,\mathrm{ctg}^2\,\theta_0)^{3/2}}\,.$$

Таким образом,

$$\vec{B} = -mn\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,, \tag{3}$$

где $r = (\rho^2 + b^2\,\mathrm{ctg}^2\,\theta_0)^{1/2}$ — расстояние от начала соленоида до точки наблюдения. Поле (3) является полным аналогом поля точечного магнитного заряда. Силовые линии сходятся в начало соленоида радиально и равномерно по телесному углу. Для заданного угла θ_0 формула (3) справедлива по крайней мере на сферах радиусов $r \geq b/\sin\theta_0$ и для углов $\theta \geq \theta_0$. Двигая кольцо по соленоиду в сторону увеличения z, убеждаемся, что она справедлива для любых r.

Полный поток, выходящий из соленоида, равен $\Phi_0 = H_0 \cdot \pi a^2$, тогда поток сквозь кольцо равен

$$\Phi_k = \Phi_0 - \frac{\Phi_0}{4\pi}\int\limits_0^{\theta_0} 2\pi\sin\theta\,d\theta = \frac{\Phi_0}{2}(1 + \cos\theta_0)\,.$$

Учитывая временную зависимость, записываем

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2}(1 + \cos\theta_0)\,e^{-i\omega t}\,.$$

Подставляя поток Φ в уравнение (1), получим для эдс индукции выражение

$$\mathcal{E} = \frac{\Phi_0\,\omega}{2c}(1 + \cos\theta_0)\,e^{-i(\omega t - \pi/2)}\,.$$

Комплексное сопротивление кольца равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}\,e^{i\varphi}\,,$$

где $tg\varphi = -\omega L/c^2R$. Комплексный ток в кольце равен

$$\tilde{J} = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{\Phi_0\,\omega\,(1+\cos\theta_0)}{2c\sqrt{R^2+\left(\omega L/c^2\right)^2}}\,e^{-i(\omega t+\varphi-\pi/2)}.$$

Отбрасывая мнимые части в выражениях для тока и для ρ-составляющей магнитной индукции при $\rho = b$, получаем

$$J = \frac{\Phi_0\,\omega\,(1+\cos\theta_0)}{2\,c\sqrt{R^2+\left(\omega L/c^2\right)^2}}\,\sin(\omega t+\varphi),$$

$$B_\rho = -\frac{mn}{b^2}\sin^3\theta_0\cos\omega t\,.$$

Сила, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током J, находящимся в магнитном поле $\vec{B}$, определяется формулой Ампера:

$$d\vec{F} = \frac{J[d\vec{l}\times\vec{B}]}{c}\,.$$

Интегрируя силу по кольцу и усредняя за период, получаем

$$\bar{F}_z = \frac{1}{T}\int\limits_0^T J\,2\pi b\,B_\rho\,dt = \frac{\Phi_0^2\,\omega\,(1+\cos\theta_0)\sin^3\theta_0}{4\,c^2b\sqrt{R^2+\left(\omega L/c^2\right)^2}}\times$$

$$\times\left[\cos\varphi\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T\cos\omega t\sin\omega t\,dt+\sin\varphi\,\frac{1}{T}\int\limits_0^T\cos^2\omega t\,dt\right]. \qquad (4)$$

Здесь учтено, что $mn = \Phi_0/4\pi$. Первый интеграл в уравнении (4) равен нулю, так как подынтегральная функция нечетная, а второй

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\cos^2\omega t\,dt = \frac{1}{2}\,,$$

где $T = 2\pi/\omega$. Подставляя в уравнение (4)

$$\sin\varphi = -\frac{\omega L/c^2}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L/c^2\right)^2}},$$

окончательно получаем

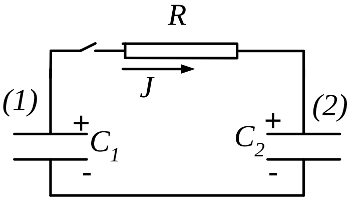
$$\bar{F}_z = -\frac{\Phi_0^2\,\omega^2\,L}{8c^4\,b}\;\frac{(1+\cos\theta_0)\sin^3\theta_0}{R^2 + \left(\omega L/c^2\right)^2}.$$

Р.56. Рассмотреть разрядку конденсатора C_1, на конденсатор C_2.

Пусть конденсатор 1 заряжен до напряжения U_0. Тогда положительный начальный заряд на его обкладках равен $Q_0 = U_0 C_1$. В любой момент времени после замыкания ключа сумма падений напряжений по контуру равна нулю, так как в контуре нет эдс (II закон Кирхгофа):

$$-U_1 + U_2 + JR = 0, \tag{1}$$

где U_1, U_2 — напряжения соответственно на 1-м и 2-м конденсаторах. Знак "$-$" перед U_1 связан с тем, что при обходе по контуру вдоль направления тока (см.рисунок) конденсатор (1) проходится от "$-$" к "$+$". Запишем еще закон сохранения заряда



$$Q_1 + Q_2 = Q_0, \tag{2}$$

где Q_1 и Q_2 – положительные заряды соответственно 1-го и 2-го конденсатора. Заменяя в уравнении (1) напряжения и ток согласно соотношениям

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1}, \qquad U_2 = \frac{Q_2}{C_2}, \qquad J = -\frac{dQ_1}{dt},$$

и используя уравнение (2), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{Q_1}{RC} + \frac{Q_0}{RC_2}, \tag{3}$$

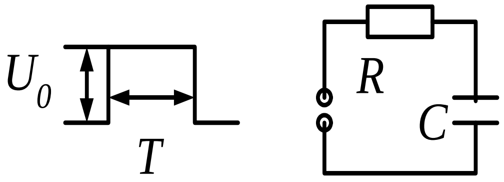
где $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$. Решением уравнения (3), удовлетворяющим начальному условию, что при $t=0$ $Q_1 = Q_0$, будет

$$Q_1 = \frac{Q_0}{C_1+C_2}\left(C_2\,e^{-t/RC} + C_1\right),$$

отсюда

$$U_1 = \frac{U_0}{C_1+C_2}\left(C_2\,e^{-t/RC} + C_1\right).$$

Р.57. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и емкости C, прикладывается прямоугольный импульс напряжения:



$$U_1(t) = U_0 \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le T\,,$$

$$U_1(t) = 0 \qquad \text{при} \qquad t<0\,, t>T\,.$$

Найти напряжение на сопротивлении R. При каких условиях оно $\sim \frac{dU}{dt}$ (дифференцирующая цепочка)?

На основании второго закона Кирхгофа получим уравнение

$$JR + \frac{Q}{C} = U_0 \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le T\,, \tag{1}$$

где J — ток зарядки конденсатора, Q — положительный заряд на конденсаторе. Используя $J = dQ/dt$ и начальное условие $Q(0) = 0$, находим, что

$$Q(t) = U_0 C\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

Тогда напряжение на сопротивлении будет меняться по закону

$$U_R = JR = U_0\,e^{-t/RC} \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le T\,.$$

Для времени $t > T$ уравнение цепи примет вид

$$\frac{dQ_1}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0\,. \tag{2}$$

Решая уравнение (2) с условием, что

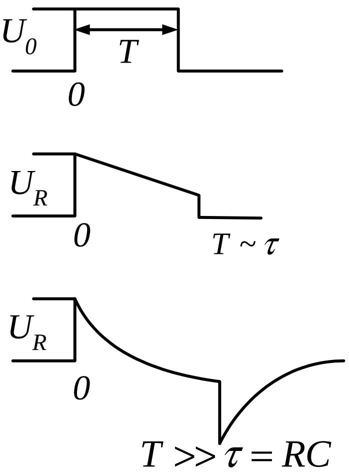
$$Q(T) = U_0 C \left(1 - e^{-T/RC}\right),$$

получаем, что заряд на пластинах конденсатора меняется по закону

$$Q(t) = U_0 C \left(e^{-(t-T)/RC} - e^{-t/RC}\right) \qquad \text{при} \qquad t > T,$$

а напряжение на сопротивлении

$$U_R = U_0 \left(e^{-t/RC} - e^{-(t-T)/RC}\right) \qquad \text{при} \qquad t > T.$$



Из рисунков видно, что, если длительность импульса много больше постоянной времени цепочки $\tau = RC$, т. е. $T \gg RC$, зарядка и разрядка конденсатора происходят очень быстро по сравнению с T и, значит, ток через сопротивление отличен от нуля в течение небольшого времени τ в начале и конце импульса, а напряжение на сопротивлении пропорционально производной от прямоугольного импульса.

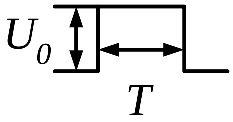
Р.58. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L, прикладывается прямоугольный импульс напряжения:

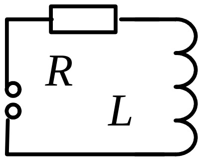
$$U_1(t) = U_0 \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le T,$$

$$U_1(t) = 0 \qquad \text{при} \qquad t < 0\,, t > T\,.$$

Найти напряжение на сопротивлении R. При каких условиях оно $\sim \int U(t)\,dt$ (интегрирующая цепочка)?

При прохождении тока по контуру в индуктивности возникает





эдс индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{L}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t},$$

где J — сила тока в цепи, Φ — магнитный поток через индуктивность. Используя второй закон Кирхгофа, получаем для цепи уравнение

$$JR + \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} = U_0 \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le T\,. \tag{1}$$

Поскольку $JR = U_R\,,\quad \frac{dJ}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dU_R}{dt}$, уравнение (1) запишется так:

$$U_R + \frac{L}{c^2R}\frac{dU_R}{dt} = U_0 \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le T\,. \tag{2}$$

Решая уравнение (2) с начальным условием $U_R(0) = 0$, находим, что

$$U_R = U_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{при} \qquad 0 \le t \le T,$$

где $\tau = L/c^2R$. После прохождения импульса уравнение для контура будет иметь вид

$$U_R + \frac{L}{c^2R}\frac{dU_R}{dt} = 0 \qquad \text{при} \qquad t > T\,.$$

Решая это уравнение с условием, что при $t = T$

$$U_R(T) = U_0\left(1 - e^{-T/\tau}\right),$$

получаем

$$U_R(t) = U_0\left(e^{+T/\tau} - 1\right)e^{-t/\tau} \qquad \text{при} \qquad t > T\,.$$

Проинтегрируем уравнение (1) по времени от 0 до t_0:

$$RJ(t_0) + \frac{R}{\tau}\int\limits_0^{t_0} J(t)\,dt = \frac{Rc^2}{L}\int\limits_0^{t_0} U_0\,dt \qquad \text{при} \qquad 0 < t_0 \le T\,. \tag{3}$$

Если $T/\tau \ll 1$, вторым слагаемым в левой части уравнения (3) можно пренебречь. Действительно, заменяя под интегралом $J(t)$ на $J(t_0)$, получаем

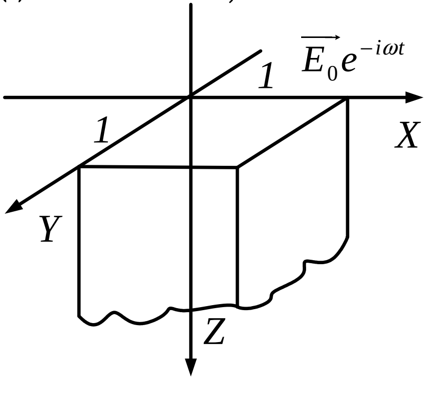
$$\frac{R}{\tau}\int\limits_0^{t_0} J(t)\,dt < RJ(t_0)\frac{t_0}{\tau} \ll RJ(t_0)\,,$$

так как $t_0/\tau \ll 1$. Тогда

$$RJ(t_0) = U_R(t_0) \sim \int\limits_0^{t_0} U_0\,dt\,,$$

т. е. если длительность импульса T много меньше постоянной цепочки τ, цепочка интегрирующая.

Р.59. Полупространство $z \geq 0$ заполнено проводником с проводимостью σ, магнитной проницаемостью μ. Параллельно плоскости



$z = 0$ имеется электрическое поле $\vec{E} = \vec{E}_0\,\exp(-i\omega\,t)$. Найти:

а) поле в полупространстве;

б) среднюю за период мощность $\overline{W} = \int\limits_0^\infty \overline{(\vec{j}\,\vec{E})}\,dz$, выделяющуюся в бесконечном столбике от нуля до ∞ по z и с единичной площадью сечения (1×1).

Поскольку плотность токов смещения в проводящей среде мала по сравнению с током проводимости, то уравнения Максвелла, описывающие распределение переменных полей и токов в проводниках, принимают вид

$$\text{rot}\;\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,$$

$$\text{rot}\;\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\,\vec{E}\,,$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0,$$
$$\operatorname{div} \vec{D} = 0,$$
$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \tag{1}$$

где σ — проводимость среды. Используя эти уравнения, можно получить дифференциальное уравнение, содержащее только вектор напряженности электрического или магнитного полей:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,. \tag{2}$$

Из симметрии рассматриваемой задачи ясно, что $\vec{E}$ может зависеть только от z и времени. Граничное условие для электрического поля на поверхности проводника очевидно из первого уравнения системы (1): $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. В силу этого условия электрическое поле в проводнике у его поверхности равно $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$. В переменном поле с частотой ω зависимость всех величин от времени описывается множителем $\exp(-i\omega t)$. Тогда уравнение (2) для напряженности электрического поля, зависящей только от координат, примет вид

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + k^2 \vec{E} = 0\,,$$

где

$$k = \sqrt{-\frac{4\pi\mu\sigma\omega\, i}{c^2}} = \pm\frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{c}(1-i) = \pm\frac{1-i}{\delta}\,, \qquad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\,.$$

Решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $z \to \infty$, пропорционально $\exp\big(-(1-i)z/\delta\big)$. Учитывая граничное условие при $z = 0$, получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}, \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E}_0\, e^{-\frac{z}{\delta}}\, e^{-i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}.$$

Таким образом, по мере проникновения вглубь проводника амплитуда напряженности электрического поля, а с ней и амплитуда тока убывает по экспоненциальному закону. При этом основная часть тока сосредоточена в поверхностном слое толщиной δ. Величина скин-слоя

δ уменьшается с частотой $\delta \sim 1/\sqrt{\omega}$. Условие применимости макроскопических уравнений поля, о которых говорилось выше, требует, чтобы δ было велико по сравнению с длиной свободного пробега электронов проводимости. При увеличении частоты это условие в металлах нарушается первым.

Средняя по времени энергия $\overline{dW}$, диссипируемая в элементе оъема dv проводника в единицу времени, равна

$$\overline{dW} = \overline{(\vec{j}\,\vec{E})}\,dv = \sigma\,\overline{E^2}\,dv\,,$$

где черта означает усреднение по времени. Здесь $\vec{j}$ и $\vec{E}$ вещественные.

Энергия, выделяемая в бесконечном столбике с единичной площадью сечения:

$$\overline{W} = \int\limits_0^\infty \sigma\,\overline{E^2}\,dz\,.$$

Если $\vec{j}$ и $\vec{E}$ взять в комплексном виде, то среднее по времени значение их произведения можно вычислить так:

$$\overline{W} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \mathcal{R}e\,(\vec{j}\,\vec{E}^{\,*})\,dz = \frac{\sigma\,E_0^2}{2}\int\limits_0^\infty e^{-2z/\delta}\,dz = \frac{E_0^2\sigma\,\delta}{4}.$$

Р.60. Найти активное сопротивление R тонкого цилиндрического проводника в предельных случаях слабого и сильного скин-эффекта. Радиус проводника — a, длина — l, проводимость — σ, магнитная проницаемость — $\mu = 1$.

Внутри провода ввиду его осевой симметрии в цилиндрической системе координат с осью Z вдоль оси провода поле $\vec{E}$ имеет лишь z-компоненту и зависит только от координаты r. Для периодического поля с частотой ω получаем уравнение (см. Р.59) Бесселя

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial E}{\partial r} + k^2 E = 0\,,$$

где

$$k = \pm\frac{1-i}{\delta}\,, \quad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\,, \qquad E = E_z\,.$$

Общим решением этого уравнения будет выражение

$$E_z = A_1\,\mathcal{I}_0(kr) + A_2\,Y_0(kr)\,,$$

где $\mathcal{I}_0(kr)$, $Y_0(kr)$ — цилиндрические функции нулевого порядка соответственно первого и второго рода. Так как E не может обратиться в бесконечность на оси провода, то A_2 следует положить равным нулю: $A_2 = 0$, поскольку $Y_0(0) = \infty$. Таким образом, $E_z = A_1\,\mathcal{I}_0(kr)$.

Используя разложение функции Бесселя при $kr \ll 1$, что соответствует предельному случаю малых частот ($a/\delta \ll 1$),

$$\mathcal{I}_0(kr) = 1 - \frac{(kr/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(kr/2)^4}{(2!)^2} - \ldots$$

для напряженности электрического поля получаем

$$E_z \simeq A_1\left[1 - \frac{i}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\right]e^{-i\omega t}\,.$$

По такому же закону распределена плотность тока $j_z = \sigma E_z$. Сопротивление проводника переменному току силы J найдем как отношение среднего количества энергии $\overline{W}$, выделяемой в проводнике за единицу времени, к среднему за период значению квадрата силы тока $\overline{J^2}$:

$$R = \frac{\overline{W}}{\overline{J^2}}\,,$$

$$\overline{W} = \frac{\sigma\,l}{2}\int\limits_0^a \mathcal{R}e\,(E_z\cdot E_z{}^*)\,2\pi r\,dr \simeq \frac{\pi a^2 l\,\sigma\,A_1^2}{2}\left(1 + \frac{1}{24}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4\right).$$

Найдем полный ток, текущий по проводнику:

$$J = \int_0^a j_z\, 2\pi r\, dr = \pi a^2 \sigma A_1 \left[1 - \frac{i}{4}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{48}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \right] e^{-i\omega t}.$$

Тогда средний квадрат тока:

$$\overline{J^2} = \frac{1}{2}\mathcal{R}e\,(JJ^*) = \frac{\pi^2 a^4 \sigma^2 A_1^2}{2}\left(1 + \frac{1}{48}\frac{a^4}{\delta^4}\right)$$

и сопротивление:

$$R = \frac{l}{\pi a^2 \sigma}\left(1+\frac{1}{48}\frac{a^4}{\delta^4}\right) = \frac{l}{\pi a^2 \sigma}\left(1+\frac{1}{12}\left(\frac{\pi \sigma \omega a^2}{c}\right)^2\right) \quad \text{при} \quad \delta \gg a.$$

При больших частотах ($\delta \ll a$) можно считать поверхность плоской. Поэтому (см. Р.59)

$$E_z = A_1 e^{-\frac{a-r}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{a-r}{\delta}\right)}.$$

Поступая далее так же, как и в случае малых частот, находим

$$\overline{W} = \frac{\pi a l\, \sigma\, \delta A_1^2}{2}, \qquad \overline{J^2} = \pi^2 a^2 \sigma^2 \delta^2 A_1^2\,.$$

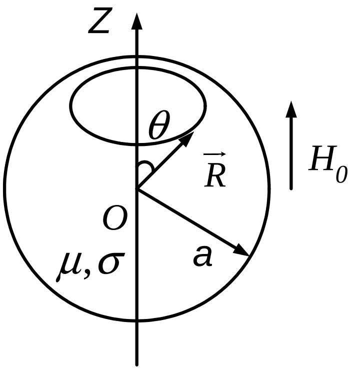
И значит,

$$R = \frac{\overline{W}}{\overline{J^2}} = \frac{l}{2\pi a \sigma \delta} \qquad \text{при} \qquad \delta \ll a\,.$$

Р.61. Металлический шар радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ помещен в однородное переменное магнитное поле $\vec{H}(t) = \vec{H}_0 \exp(-i\omega t)$. Считая частоту малой, найти в первом неисчезающем приближении распределение вихревых токов в шаре и среднюю поглощаемую им мощность.

Если частота ω изменения поля мала, т. е. глубина проникновения δ велика по сравнению с размерами тела, тогда распределение маг-

нитного поля в каждый момент времени будет таким, каким оно было бы в стационарном случае при заданном значении внешнего поля вдали от тела. Действительно, в этом случае правую часть уравнения



$$\nabla^2 \vec{H} = -\frac{4\pi i \mu \sigma \omega}{c^2}\, \vec{H}$$

можно заменить нулем. Используя решение задачи Р.43, получаем, что поле внутри шара в нулевом (по частоте) приближении равно

$$\vec{H} = \frac{3}{\mu + 2} \vec{H}_0\, e^{-i\omega t}\,.$$

Выберем сферическую систему координат (R, θ, α) с началом в центре шара. Угол θ будем отсчитывать от оси Z, направленной вдоль $\vec{H}_0$. Из свойств симметрии системы ясно, что вихревое электрическое поле, согласно уравнению

$$\text{rot}\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

будет лежать в плоскостях, перпендикулярных $\vec{H}_0$, и направлено по касательным к окружностям с центром на оси Z. Оно зависит только от величины радиусов этих окружностей. Так же будут направлены и токи: $j_\alpha = \sigma E_\alpha$. Нужно заметить, что в нулевом по частоте приближении поле $\vec{E}$ отсутствует, что следует из уравнения

$$\text{rot}\ \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\, \vec{E} = 0\,.$$

Воспользуемся интегральным аналогом уравнения (1)

$$\oint E_l\, dl = -\frac{1}{c}\, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,,$$

где Φ — поток вектора магнитной индукции через поверхность, натянутую на контур, по которому берется циркуляция вектора $\vec{E}$ в левой

стороне уравнения. Взяв интеграл по окружности радиуса $R\sin\theta$, найдем

$$E_\alpha = \frac{3\mu\, i}{2\,(\mu+2)}\,\frac{H_0 R\omega \sin\theta}{c}\; e^{-i\omega t}$$

и, значит,

$$j_\alpha = \frac{3\mu}{2\,(\mu+2)}\,\frac{H_0 R\,\sigma\,\omega \sin\theta}{c}\; e^{-i(\omega t-\pi/2)}\,.$$

Отбрасывая мнимую часть, получаем

$$j_\alpha = \frac{3\mu\,\sigma\,\omega\, H_0 R}{2\,(\mu+2)\,c} \sin\theta\, \sin\omega t\,.$$

Количество тепла, выделяемое в единицу времени в элементе объема $dv = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta\, dR$, равно

$$dW = \frac{j^2}{\sigma}\, 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta\, dR\,.$$

Интегрируя это выражение по объему шара, получаем

$$W(t) = \frac{6\pi}{5}\left(\frac{\mu\,\omega\, H_0}{(\mu+2)\,c}\right)^2 \sigma\, a^5 \sin^2\omega\, t\,.$$

Тогда среднее количестно тепла, выделяемое в единицу времени, будет

$$\overline{W} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T W(t)\,dt = \frac{3\pi}{5}\frac{\mu^2\omega^2\,\sigma H_0^2 a^5}{c^2(\mu+2)^2} \quad \text{при} \quad \delta \gg a\,.$$

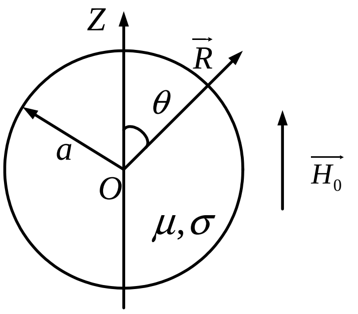
Поглощаемая мощность энергии при малых частотах пропорциональна ω^2.

Р.62. Металлический шар помещен в однородное магнитное поле, изменяющееся с частотой ω. Найти результирующее поле и среднюю поглощаемую шаром мощность при больших частотах. Радиус шара — a, магнитная проницаемость — μ, проводимость — σ.

Указание. При определении поля вне шара считать, что внутри шара поле равно нулю (т. е. пренебречь глубиной проникновения δ по

сравнению с радиусом шара a). При определении поля внутри шара считать его поверхность плоской.

При больших частотах магнитное поле проникает лишь в тонкий



поверхностный слой проводника. Глубина проникновения $\delta \ll a$. Для вычисления поля вне проводника можно пренебречь толщиной этого слоя, т. е. считать, что внутрь тела магнитное поле не проникает. По шару будут течь поверхностные токи. Эти токи создадут магнитный момент шара $\vec{m} = b\vec{H}_0$, так что поле вне шара согласно результатам задачи Р.47 можно записать как

$$\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{\vec{m}}{R^3} + \frac{3\vec{R}(\vec{m}\,\vec{R})}{R^5} \qquad \text{при} \qquad R > a\,.$$

Из условия непрерывности нормальной составляющей вектора магнитной индукции на поверхности шара $B_R\Big|_{R=a} = 0$ получим

$$H_0\,\cos\theta - \frac{bH_0\,\cos\theta}{a^3} + \frac{3bH_0\,\cos\theta}{a^3} = 0\,,$$

откуда $\vec{m} = -\vec{H}_0 a^3/2\,,\ b = -a^3/2$— магнитная поляризуемость шара при сильном скин-эффекте. Значит,

$$\vec{H}(R = a) = -\frac{3}{2}H_0\,\sin\theta\,\vec{n}_\theta\,,$$

где $\vec{n}_\theta$ — единичный вектор, соответствующий углу θ в сферической системе координат $(R,\ \theta,\ \alpha)$. Нахождение истинного распределения поля в поверхностном слое шара можно упростить, рассматривая небольшие участки поверхности как плоские с известным значением поля на поверхности. Тогда (см. Р.59)

$$\vec{H} = -\frac{3}{2}H_0\,\sin\theta\,e^{-\frac{h}{\delta}}\,e^{-i\left(\omega\,t\,-\,\frac{h}{\delta}\right)}\,\vec{n}_\theta\,,$$

$$H_R = H_\alpha = 0\,,$$

где $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$, а h отсчитывается от поверхности по нормали вглубь шара. Среднюю поглощаемую шаром энергию можно найти как среднее количество энергии поля, втекающей извне внутрь проводника в единицу времени, т. е. интеграл от среднего по времени вектора Пойнтинга $\vec{S}$, взятый по поверхности шара:

$$\overline{W} = \int (\overline{\vec{S}}\, d\vec{s}) = \frac{c}{4\pi} \int \left(\overline{[\vec{E} \times \vec{H}]} \cdot d\vec{s}\right).$$

Из уравнения $\operatorname{rot} \vec{H} = 4\pi\sigma\, \vec{E}/c$ найдем

$$\vec{E} = \frac{c\,(1-i)}{4\pi\,\sigma\,\delta}[\vec{H}\ \times \vec{n}],$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный поверхности и направленный внутрь шара.

Найдем средний вектор Пойнтинга на поверхности шара:

$$\overline{\vec{S}} = \frac{c}{4\pi}\overline{[\vec{E}\ \times \vec{H}]} = \frac{c}{8\pi}\mathcal{R}e\,[\vec{E}\ \times \vec{H}^{*}] =$$

$$= \frac{c}{32\pi^2\,\sigma\,\delta}\mathcal{R}e\left((1-i)\left[[\vec{H}\ \times \vec{n}]\ \times \vec{H}^{\star}\right]\right) = \frac{9}{128}\ \frac{c^2\,H_0^2\,\sin^2\theta}{\pi^2\,\sigma\,\delta}\ \vec{n}\,.$$

Интегрируя $\overline{\vec{S}}$ по поверхности, окончательно получаем

$$\overline{W} = \int\limits_0^{\pi} \overline{S}\, 2\pi\, a^2\, \sin\theta\, d\theta = \frac{3}{8}\, H_0^2 a^2 c\, \sqrt{\frac{\mu\,\omega}{2\pi\,\sigma}} \qquad \text{при} \qquad \delta \ll a\,.$$

Таким образом, диссипация энергии при больших частотах пропорциональна $\sqrt{\omega}$.

P.63. По цилиндрическому прямолинейному проводнику радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$ течет переменный ток $J = J_0\, \exp\left(-i\omega\, t\right)$. В случае сильного скин-эффекта найти долю времени, в течение которого поток энергии направлен от

провода в окружающее пространство. Найти на единицу длины проводника среднюю поглощаемую проводником мощность.

При больших частотах можно считать поверхность проводника плоской, тогда (см. P.59, P.60) для напряженности электрического поля запишем

$$E_z = A\, e^{-\frac{h}{\delta}}\, e^{-i(\omega t - \frac{h}{\delta})},$$

где $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$, A — константа, а h отсчитывается от поверхности в глубь проводника. Ось Z направлена вдоль проводника. Из уравнения $rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ найдем напряженность магнитного поля

$$H_\alpha = \frac{A\sqrt{2}\,c}{\delta\,\omega}\, e^{-\frac{h}{\delta}}\, e^{-i(\omega t - \frac{h}{\delta} - \frac{\pi}{4})}.$$

Константу A можно найти, проинтегрировав плотность тока $j = \sigma E_z$ по сечению проводника и приравняв амплитуду полученного тока амплитуде J_0:

$$\mathcal{R}e\left(2\pi\, A\,\sigma \int\limits_0^a e^{\frac{h}{\delta}(i-1)}(a-h)\,dh\right) = J_0\,.$$

Откуда

$$A = \frac{J_0}{a\,c}\sqrt{\frac{2\,\omega}{\pi\,\sigma}}\,.$$

При вычислении интеграла учтено, что $a/\delta \gg 1$. Константу A можно найти и более просто, если вспомнить, что интеграл от вектора $\vec{H}$ по замкнутому контуру равен полному току, проходящему через поверхность, натянутую на этот контур, умноженному на $4\pi/c$ (поскольку справедливо уравнение $\mathrm{rot}\,\vec{H} = 4\pi\vec{j}/c$):

$$\frac{A\sqrt{2}\,c}{\sigma\,\omega}\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2\pi\,a = J_0\,\frac{4\pi}{c}\,.$$

Итак, на поверхности проводника напряженность электрического и магнитного полей будет зависеть от времени следующим образом:

$$E_z = \frac{J_0}{a\,c}\sqrt{\frac{2\,\omega}{\pi\,\sigma}}\,\cos\omega\,t\,,$$

$$H_\alpha = \frac{2\sqrt{2}J_0}{a\,c}\,\cos(\omega\,t - \frac{\pi}{4}).$$

Поток энергии через единицу площади:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}] = \frac{J_0^2}{2\pi\,a^2\,c}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\,\sigma}}\left[\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(2\omega\,t-\frac{\pi}{4}\right)\right]\vec{n}, \quad (1)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, направленный вглубь проводника. В течение большей части периода колебаний, равной трем четвертям периода изменения E и H, величина вектора Пойнтинга положительна, и, следовательно, энергия поступает в провод из внешнего пространства и идет на изменение энергии магнитного поля в объеме провода и на выделение тепла в проводе. В течение одной четвертой периода изменения E и H $\tau = T/4 = \pi/2\omega$ вектор Пойнтинга отрицательный и, следовательно, поток энергии направлен от провода в окружающее пространство. В течение этого промежутка времени энергия, запасенная в магнитном поле в объеме провода, частично возвращается в окружающее провод пространство и частично преобразуется в тепло. Среднее значение вектора Пойнтинга за период, умноженное на величину поверхности провода единичной длины, есть мощность энергии, выделяемая в проводнике единичной длины в виде тепла:

$$\overline{W} = 2\pi\,a\left|\overline{\vec{S}}\right|.$$

Из формулы (1) сразу можно написать, что

$$\overline{\vec{S}} = \frac{J_0^2}{2\pi\,a^2\,c}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\,\sigma}}\cos\frac{\pi}{4}\,\vec{n} = \frac{J_0^2}{4\pi\,a^2\,c}\sqrt{\frac{2\omega}{\pi\,\sigma}}\,\vec{n};$$

тогда

$$\overline{W} = \frac{J_0^2}{a\,c}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\,\sigma}} \qquad \text{при} \qquad \delta \ll a.$$

Сравните с задачей Р.60.

7. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ

Уравнение движения и сила Лоренца $d\vec{P}/dt = e\vec{E} + q[\vec{v}\vec{B}]/c$.

$$\vec{P} = \gamma m_0\vec{v},\ \ \mathcal{E} = \gamma m_0 c^2,\ \ \vec{P}/\mathcal{E} = \vec{v}/c^2,\ \text{т. е.}\ \vec{v} = \frac{\vec{P}c^2}{\mathcal{E}} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

В постоянном однородном электрическом поле

$$\vec{P} = q\vec{E}t,\ \ \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0 + (cqEt)^2}.$$

В постоянном однородном магнитном поле

$$\dot{\vec{P}} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}\vec{B}\right],\ \text{или}\ \frac{\mathcal{E}}{c^2}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{c}\left[\vec{v}\vec{B}\right].$$

Для тонкой электростатической линзы в парксиальном приближении

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{4\sqrt{U_0}}\int\limits_a^b \frac{U''}{\sqrt{U}}dz,$$

а для такой же магнитной линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{q}{8mc^2U}\int\limits_a^b H_z^2 dz.$$

7.1. Движение частиц в электрическом и магнитном полях. Дрейф. Магнитная ловушка

7.1. Найти траекторию релятивистской частицы с зарядом q, начальной кинетической энергией $\mathcal{E}_0$ и начальным импульсом $\vec{P}_0 = (0, P_0, 0)$ в постоянном однородном электрическом поле $\vec{E} = (E, 0, 0)$.

7.2. Релятивистская частица с зарядом q движется в постоянном однородном магнитном поле $\vec{H}$. Найти зависимость её координат от времени, а также радиус и частоту вращения.

7.3. Найти частоты колебаний заряженного пространственного нерелятивистского осциллятора, находящегося в постоянном однородном магнитном поле. Собственная частота колебаний осциллятора равна ω_0.

7.4. К зазору размером $d = 10$ см между параллельными проводящими пластинами приложено напряжение $U = 100$ кВ. Параллельно плоскостям пластин направлено постоянное однородное магнитное поле $\vec{H}$. При какой величине поля H электрон (масса — m, заряд — e), вылетающий из пластины с отрицательным потенциалом с нулевой начальной скоростью, не достигает другой пластины (условие магнитной изоляции)?

7.5. Частица массы m, имеющая заряд q, движется в постоянных однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. Найти её координаты в зависимости от времени в нерелятивистском случае, а также скорость её дрейфа.

7.6. При какой скорости заряженной частицы её траектория прямолинейна при движении в ортогональных электрическом и магнитном полях?

7.7. Найти скорость дрейфа частицы в задаче 7.5, если вместо электрического поля на частицу действует сила $\vec{F}$ того же направления.

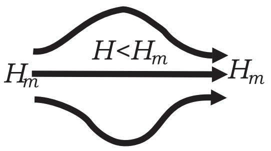
7.8. Показать, что для заряженной частицы, движущейся в магнитном поле H, с учетом выражения её обобщенного импульса $\vec{P}_\perp = \vec{p}_\perp +$

$+\frac{e}{c}\vec{A}$ существует адиабатический инвариант

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \vec{P}_{\perp} d\vec{r} = 3c\vec{P}_{\perp}^{2}/\left(2eH\right).$$

7.9. Между областями 1, 2 однородности статического магнитного поля H находится область 3, где аксиальное поле усилено до максимального значения H_m ("магнитная пробка"). Угол между импульсом $\vec{P}$ и $\vec{H}$ в области I в некоторый момент равен θ. При каком соотношении между θ, H и H_m частица отразится от области 3 с сильным полем, если изменение поля медленное?

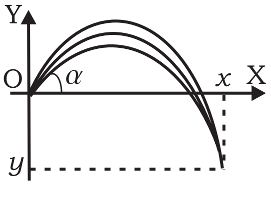
7.10. В среднюю часть ловушки с аксиальной симметрией



инжектирована порция частиц с изотропно распределёнными скоростями. Какая доля R частиц удержится в ловушке достаточно долго?

7.2. Фокусировка продольным и поперечным полями. Квадрупольные электростатические и магнитные линзы

7.11. Показать, что слабо расходящийся пучок заряженных



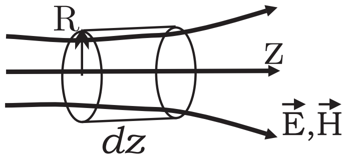
частиц, испущенных под углом $\frac{\pi}{2}+\alpha$ по направлению к вектору $\vec{E}$, фокусируется в точке с координатами $x = g\operatorname{ctg}\alpha$, $y = g\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)$, где $g = \frac{mv_0^2}{eE}$.

7.12. Показать, что узкий параллельный пучок заряженных

частиц, по касательной входящий в цилиндрический конденсатор, находящийся под напряжением U, будет сфокусирован после поворота на угол $\pi/2\sqrt{2} = 63,6^o$. Соответственно слабо расходящийся пучок сфокусируется после поворота на угол, вдвое больший. Энергия пучка удовлетворяет условию $mv_0^2/2 = \alpha q$, где $\alpha = U/2\ln(r_2/r_1)$.

7.13. На каком расстоянии от точки вылета сфокусируется слабо расходящийся пучок заряженных частиц движущийся вдоль однородного магнитного поля $\vec{H}$. Скорость частиц — v, заряд — q, масса — m.

7.14. На каком расстоянии от точки вылета сфокусируется слабо расходящийся пучок заряженных частиц, движущийся вначале перпендикулярно магнитному полю $\vec{H}$? Скорость частиц v, заряд q, масса m.



7.15. Используя теорему Гаусса, показать, что в неоднородном аксиально-симметричном поле $E_R \approx -\frac{R}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

7.16. Показать, что для тонкой электростатической линзы в параксиальном приближении в аксиально симметричном поле уравнение траектории заряженной частицы имеет вид

$$\frac{d}{dz}\left(\sqrt{U}\frac{dR}{dz}\right) = \frac{R}{4}\frac{U''}{\sqrt{U}}$$

причём

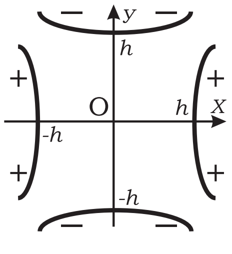
$$v_z = \frac{dz}{dt} = v\cos\alpha \approx v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

7.17. Показать, что фокусное расстояние F для линзы из задачи 7.16 удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{F} = -\frac{1}{4\sqrt{U_0}}\int\limits_a^b \frac{U''}{\sqrt{U}}dz,$$

где U_0 — потенциал вне линзы, а интеграл берется по области поля.

7.18. Показать, что фокусное расстояние F для пучка заряженных



частиц в параксиальном приближении для тонкой электростатической квадрупольной линзы с потенциалом $U = U_0(x^2 - y^2)/h^2$ удовлетворяет соотношениям

$$F_x^{-1} = p\sin p\ell \approx p^2\ell,$$

$$F_y^{-1} = -pshp\ell \approx -p^2\ell,$$

где $p = \sqrt{qU/mv_0^2}/h$.

7.19. Показать, что для системы двух последовательных квадрупольных линз, расположенных на расстоянии d, имеющих фокусные расстояния $F_x = F$, $F_y = -F$ и повёрнутых в плоскостяхXY друг относительно друга на 90^o, результирующие фокусные расстояния по осям X и Y одинаковы и равны $\sim F^2/d$ при $d \ll F$.

7.20. Показать, используя проекции уравнения движения в аксиально симметричном магнитном поле и результат задачи 7.15, что для частиц с зарядом e и массой m, разогнанных предварительно напряжением U, фокусное расстояние тонкой магнитной линзы равно

$$F = \left(\frac{e}{8mc^2U}\int H_z^2 dz\right)^{-1}.$$

7.21. Показать, что для пучка заряженных частиц фокусные расстояния в параксиальном приближении для магнитной квадрупольной линзы с магнитным скалярным потенциалом $\varphi_m = -bxy$ равны $F_x = (p\sin p\ell)^{-1}$, $F_y = -(p\,\mathrm{sh}\,p\ell)^{-1}$, где $p = \sqrt{\frac{qb}{mv_0c}}$.

7.22. Параллельно оси сплошного проводящего (литиевого) цилиндра, по которому течёт ток $J = 0,5$ МА, пролетает ультрарелятивистский протон с энергией $\mathcal{E} = 300$ ГэВ. Длина цилиндра $\ell = 10$ см, радиус $R = 1$ см. Найти фокусное расстояние такой линзы. Показать, что при указанных условиях линза тонкая. Энергия покоя протона $\mathcal{E}_0 = m_pc^2 = 1$ ГэВ.

Физические постоянные

Скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Заряд электрона $e = 4,8 \cdot 10^{-10} CGSE = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Масса электрона $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$ г.

Масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-24}$ г.

Диэлектрическая проницаемость вакуума $4\pi\varepsilon_0 = 1 CGSE = \frac{10^7}{c^2}$Ф/м.

Магнитная проницаемость вакуума $4\pi\mu_0 = 1 CGSE = 10^{-7}$ Гн/м.

Проводимость меди $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ с$^{-1}$ $\approx 6 \cdot 10^7$Ом$^{-1}$м$^{-1}$.

Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град=
$= 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град= $0,86 \cdot 10^4$ эВ/град.

Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·с= $6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с=
$= 4,14 \cdot 10^{-15}$ эВ·с.

Число Авогадро $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Газовая постоянная $R = 8,3 \cdot 10^7$ эрг·град$^{-1}$·моль$^{-1}$.

Энергия 1эВ $= 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

$m_e c^2/e = 5 \cdot 10^5$ В.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ

1.1. Закон Кулона. Поле и потенциал точечного заряда. Принцип суперпозиции

1.1. $r_{\min} = \frac{e^2}{\mathcal{E}/2}$; $T \simeq \frac{e^2}{2r_{\min}k} \simeq 3,35 \cdot 10^{10} K$.

1.2. $v_{\text{поз}} = \left(\frac{e^2/a}{m}\frac{4\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)^{1/2}$, $v_{\text{прот}} = \left(\frac{e^2/a}{M}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{1/2}$.

1.3. $v = \left[\frac{q^2/a}{m}\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^{1/2}$, $\mathcal{E}_{\text{ион}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{q^2}{a}$.

1.4. $v = \left(\frac{2q}{ma}\right)^{1/2}\left[\sqrt{q_2}-\sqrt{q_1}\right]$ при $q_1 < q_2$; $v = 0$ при $q_2 < q_1$.

1.5. $Q_{\text{нов}} = k_1 k_2 Q$.

1.6. $E_\alpha = \frac{U/\alpha_0}{r}$, $E_r = E_z = 0$.

1.7. $q_{1,2} = \frac{R\sqrt{R^2+a^2}}{qa^2}\left(A_{1,2}\sqrt{R^2+a^2} - A_{2,1}R\right)$.

1.8. $\Delta T = \frac{1}{8}\frac{mv^2}{C}\frac{mv^2}{e^2/R}$.

1.9. $\varphi = \varphi_0/2$; поле не изменится по величине, вектор поля повернется на угол $\pi/3$ и станет направленным перпендикулярно оставшейся палочке.

1.10. Сфера радиуса $R = \left|a\frac{q_1 q_2}{q_1^2-q_2^2}\right|$ с центром на линии, проходящей через заряды на расстоянии $x_1 = a\frac{q_1^2}{q_1^2-q_2^2}$ от заряда q_1 в сторону заряда q_2. При этом $x_1 = R\left|q_1/q_2\right|$ и $\left|x_1\left(a-x_1\right)\right| = R^2$.

1.11. а) $\varphi = q/\ell$; б) $Q = -qR/\ell$.

1.12 $\varphi = \frac{q}{\left(a^2+h^2\right)^{1/2}}$, $E_z = \frac{qh}{\left(a^2+h^2\right)^{3/2}}$.

1.13. Внутри сферы $E_z = -\frac{2\pi\sigma R^2}{a^2}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. Над полусферой с плотностью 2σ $E_z = \frac{2\pi\sigma R^2}{a^2}\left(3 + \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. Под полусферой с плотностью σ $E_z = -\frac{2\pi\sigma R^2}{a^2}\left(3 - \frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$.

1.14. $\varphi_{\text{нар}} = 2\pi\sigma R^2/a$, $\varphi_{\text{внутр}} = 2\pi\sigma R$.

1.15. а)$\varphi_{\text{отв}} = -2\pi\sigma\sqrt{R^2+z^2}$, $E_{z\,\text{отв}} = \frac{2\pi\sigma z}{\sqrt{R^2+z^2}}$;

б) $\varphi_{\text{диск}} = 2\pi\sigma\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$, $E_{z\,\text{диск}} = 2\pi\sigma z\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$;
в) $\varphi_{\text{плоск}} = -2\pi\sigma\,|z|$, $E_{z\,\text{плоск}} = 2\pi\sigma\frac{z}{|z|}$.

1.16. $E_z(O_1) = E_z(O_2) = \frac{-2\pi\sigma d}{\sqrt{a^2+d^2}}$, $E_z(O_3) = -\frac{2\pi\sigma d}{\sqrt{a^2+d^2/4}}$.

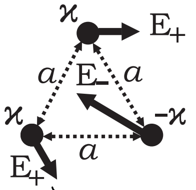
1.17. $\vec{E} = 0$.

1.18. $P = \frac{Q^2}{8\pi R^4}$.

1.2. Теорема Гаусса

1.19. а) $\vec{E} = 2\pi\sigma\vec{z}/|z|$; б) внутри конденсатора $|E| = 4\pi q/S$, вне $\vec{E} = 0$; в) $\vec{E} = \frac{2\varkappa}{r^2}\vec{r}$.

1.20. Направление сил показано на рисунке.
$E_+ = \frac{2\varkappa}{a}$, $E_- = \frac{2\varkappa}{a}\sqrt{3}$.



1.21. $\mathrm{E}_{2\mathrm{n}} - E_{1n} = 4\pi\sigma$, где внешняя нормаль $\vec{n}$ к поверхности раздела направлена из среды 1 в среду 2.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma.$$

1.23. а) $\vec{E}_{\text{внутр}} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}\ \ (r \le a)$; $\vec{E}_{\text{нар}} = \frac{4}{3}\pi\rho\ \left(\frac{a}{r}\right)^3\vec{r}\ \ (r \ge a)$;
б) $\vec{E}_{\text{внутр}} = \frac{2\varkappa}{a^2}\vec{r}\ \ (r \le a)$; $\vec{E}_{\text{нар}} = \frac{2\varkappa}{r^2}\vec{r}\ \ (r \ge a)$;
в) $\vec{E}_{\text{внутр}} = 2\pi\sigma\frac{\vec{z}}{a}\ \ (|z| \le a)$, $\vec{E}_{\text{нар}} = 2\pi\sigma\frac{\vec{z}}{|z|}\ \ (|z| \ge a)$.

1.24. $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{a}$, где $\vec{a}$ — вектор из центра шара в центр полости.

1.25. $\sigma_1' = \sigma_2' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$, $\sigma_1'' = -\sigma_2'' = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$.

1.26. $q = \frac{4\pi\alpha}{3-n}\left(R_2^{3-n} - R_1^{3-n}\right)$ для $n \ne 3$; $q = 4\pi\alpha\ln\frac{R_2}{R_1}$ для $n = 3$. $\vec{E} = 0$ при $r \le R_1$, $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$ при $r \ge R_2$, $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}\frac{(r/R_1)^{3-n}-1}{(R_2/R_1)^{3-n}-1}$ для $n \ne 3$ и $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}\frac{\ln(r/R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$ для $n = 3$ при $R_1 \le r \le R_2$.

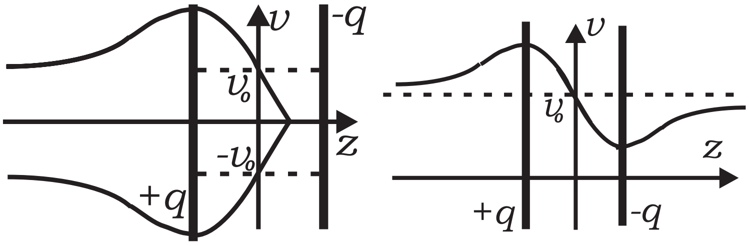
1.3. Диполь. Мультиполи

1.27. $\varphi = \frac{\vec{p}\vec{r}}{r^3}$, $\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$; вектор $\vec{p}$ направлен от $-q$ к $+q$.

1.28. $\vec{F} = q\frac{\vec{p}}{r^3} - 3q\frac{(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, $\vec{N} = q\frac{[\vec{r}\times\vec{p}]}{r^3}$.

1.29. $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{p}\vec{E}\right)$; при $\vec{p} \sim \vec{E}$, $\quad \vec{F} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left(\vec{p}\vec{E}\right)$.

1.30. $v(0) = v_0$.



1.31. $r = C\sin^2\theta$.

1.32. б) $\vec{a} = -\sum\limits_i q_i\vec{r}_i / \sum\limits_i q_i$.

1.33. $\varphi_{\text{внутр}} = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 r\cos\theta$, $\vec{E}_{\text{внутр}} = -\frac{4\pi}{3}\sigma_0\frac{\vec{z}}{|z|}$;

$\varphi_{\text{нар}} = \frac{4\pi}{3}\sigma_0\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$, $\vec{E}_{\text{нар}} = -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{p} = \frac{4\pi}{3}\sigma_0 R^3\vec{e}_z$.

1.34. $\varphi(r,\theta) = 2\pi\sigma\frac{R^3}{r^2}\cos\theta$.

1.35. $\vec{E} = 8\sigma\vec{e}_y$.

1.36. $\varphi(\vec{r}) = \frac{2(\vec{p}\vec{r})}{r^2}$, где $\vec{p} = \varkappa\vec{a}$, $\vec{a}$ — вектор от нити с зарядом $-\varkappa$ к нити с зарядом $+\varkappa$ в плоскости, перпендикулярной нитям. $\vec{E} = -\frac{2\vec{p}}{r^2} + \frac{4(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^4}$.

1.37. $\varphi(r,\theta) \simeq -6\varkappa\ln r + \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{a^3}{r^3}\varkappa\cos 3\alpha$.

1.38. $\varphi(r,\theta) = \frac{Q}{4r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$.

1.39. $\varphi(r,\theta) \simeq \frac{q\left(b^2-a^2\right)}{4r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$ при $r \gg a, b$;

$$\varphi(r,\theta) \simeq q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{qr^2}{4}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)\ (r \ll a, b).$$

1.40. $\varphi(\vec{r}) \simeq \frac{4qRx}{\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$; $E_x = -\frac{4qR}{\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$, $E_y = 0$, $E_z = \frac{12qRxz}{\pi\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}$ вблизи оси кольца. При $|z| \gg R$ $\varphi(\vec{r}) = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}$,
где $\vec{p} = \frac{4qR}{\pi}\vec{e}_x$; $\varphi(\vec{r})$ — потенциал поля диполя.

1.41. $Q = \pi a^2\sigma$, $\vec{p} = Q\vec{h}$, $Q_{xx} = Q_{yy} = -\frac{1}{2}Q_{zz} = Q\left(\frac{a^2}{4} - h^2\right)$.

1.42. а) $\varphi(r,\theta) \simeq \frac{qa^2}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$; б) $\varphi(r,\theta) \simeq \frac{3qa^2}{2r^3}\sin^2\theta\sin 2\alpha$.

1.43. $r = c\sqrt{\sin^2\theta\cdot|\cos\theta|}$.

1.44. $\varphi(r,\theta) \simeq \frac{3qa^3}{r^4}\left(5\cos^2\theta - 3\right)\cos\theta$.

1.45. $\varphi \simeq \frac{q}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^n$.

1.4. Уравнения Пуассона и Лапласа

1.46. $\rho(r) = q\delta(r) - \frac{q}{4\pi a^2}\frac{e^{-r/a}}{r}$.

1.47. а) $\varphi_{\text{внутр}} = \frac{2}{3}\pi\rho\left(3R^2 - r^2\right)$; $\varphi_{\text{нар}} = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{\rho}{r}$;

б) $\varphi_{\text{внутр}} = \varkappa\left(1 - {r^2}/{R^2}\right)$, $\varphi_{\text{нар}} = -2\varkappa\ln{r}/{R}$;

в) $\varphi_{\text{внутр}} = -2\pi\rho z^2$, $\varphi_{\text{нар}} = 2\pi\rho a\left(a - 2\left|z\right|\right)$.

1.48. $\vec{E} = -\frac{U}{\ln R_2/R_1}\frac{\vec{r}}{r^2}$.

1.49. $\varphi(x,y,z) = \frac{2\pi\sigma_0}{\gamma}e^{-\gamma|z|}\sin\alpha x\cdot\sin\beta y$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

1.50. а) $\varphi = \frac{e}{r}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-2r/a}$; б) $E_r = \frac{e}{r^2}\left(1 + 2\frac{r}{a} + 2\frac{r^2}{a^2}\right)e^{-2r/a}$;
в) $W = -\frac{e^2}{a}$.

1.51. $\vec{E}_{\text{внутр}} = 0$, $\vec{E}_{\text{нар}} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{r^3} + \frac{3\left(\vec{P}\vec{r}\right)\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{P} = \vec{E}_0R^3$;
$\sigma = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta$.

1.53. Пусть a, b, c — длины ребер параллелепипеда вдоль осей X, Y, Z соответственно и грань $z = c$ имеет потенциал U.
Тогда $\varphi(x,y,z) = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{nm}\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y\cdot\operatorname{sh}\gamma_{nm}z$, где $\alpha_n = \frac{\pi n}{a}$, $\beta_m = \frac{\pi m}{b}$, $\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2+\beta_m^2}$, $A_{nm} = \frac{16U}{\pi^2 nm\operatorname{sh}(\gamma_{nm}c)}$ для одновременно нечетных n и m, $A_{nm} = 0$ в остальных случаях.

2.1. Граничные условия

2.1. $\varepsilon_2E_{2n} - \varepsilon_1E_{1n} = 4\pi\sigma$, где внешняя нормаль $\vec{n}$ к поверхности раздела направлена из среды 1 в среду 2. $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

2.2. $E_{2n} - E_{1n} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - 1\right)E_{1n} = \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)E_{2n}$;
$\sigma_{1\text{связ}} = P_{1n} = \frac{\varepsilon_1-1}{4\pi}E_{1n}$, $\sigma_{2\text{связ}} = -P_{2n} = \frac{1-\varepsilon_2}{4\pi}E_{2n}$.

2.3. $|\vec{F}| = q|\vec{E}_0|\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon^2}}$.

2.4. $\vec{E}_{1,2} = \frac{2q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{D}_{1,2} = \varepsilon_{1,2}\,\vec{E}_{1,2} = \frac{2\varepsilon_{1,2}}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\varphi_{1,2} = \frac{2q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r}$.

2.5. $\varphi_{1,2} = \frac{2q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r}$, $\sigma_{1,2\text{своб}} = \frac{q\varepsilon_{1,2}}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$, $\sigma_{1,2\text{связ}} = \frac{q(1-\varepsilon_{1,2})}{2\pi R^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$.

2.6. $\varphi_i = \frac{2\pi q}{\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3}\frac{1}{r}$, $\vec{E}_i = \frac{2\pi q}{\varepsilon_1\alpha_1+\varepsilon_2\alpha_2+\varepsilon_3\alpha_3}\frac{\vec{r}}{r^3}$, $\vec{D}_i = \varepsilon_i\vec{E}_i$, где $i = 1, 2, 3$.

2.7. $\vec{E}_i = \frac{4\varkappa}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{\vec{r}}{r^2}$, $\vec{D}_i = \frac{4\varkappa\varepsilon_i}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{\vec{r}}{r^2}$, где $i = 1, 2$.

2.8а. $\varphi_{\text{внутр}} = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0 r\cos\theta$,

$\varphi_{\text{нар}} = -E_0 r\cos\theta + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0 a^3\frac{\cos\theta}{r^2}$;

$\vec{E}_{\text{внутр}} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\vec{E}_0$, $\vec{E}_{\text{нар}} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{r^3} + \frac{3(\vec{P}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{P} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\vec{E}_0 a^3$;

$\sigma_{\text{связ}} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\cos\theta$.

2.8б. $\vec{E} = \frac{9\varepsilon}{(1+2\varepsilon)(2+\varepsilon)}\vec{E}_0$.

2.2. Емкость

2.9. $C \simeq 20$ см ($C \simeq \frac{h}{2\ln h/R}$, где $h \simeq$ рост, $2\pi R \simeq$ талия).

2.10. а) $C \simeq \frac{\ell}{2(\pi+\ln\ell/a)}$; б) $C \simeq \frac{\ell}{2\ln\ell/a}$.

2.11. $C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi a\ln 2}$, $\sigma_{\text{связ}}|_{\varphi=0} = -\left(1-\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\frac{CU}{S}$;

$\sigma_{\text{связ}}|_{\varphi=U} = \left(1-\frac{1}{2\varepsilon_0}\right)\frac{CU}{S}$, $\rho_{\text{связ}} = \frac{CUa}{\varepsilon_0 S}\frac{1}{(x+a)^2}$.

2.12. $U = 4\pi n_0 h d_0$.

2.13. $C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$; $\sigma_{\text{связ}}(a) = -\frac{q}{4\pi a^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$,

$\sigma_{\text{связ}}(c) = \frac{q}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$, $\sigma_{\text{связ}}(b) = \frac{q}{4\pi b^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)$, где q — заряд внутренней обкладки.

2.14. $C = \left(1+\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\Omega\right)\frac{ab}{b-a}$.

2.15. $C \simeq \frac{a}{2}\frac{b}{b-a} \simeq \frac{a}{2}(1+\frac{a}{b})$.

2.16. $C \simeq \frac{1}{4\ln b/a}$.

2.17. $Q = -\frac{S}{4\pi}\left(\frac{U_1}{\ell-b}+\frac{U_2}{b-a}\right)$.

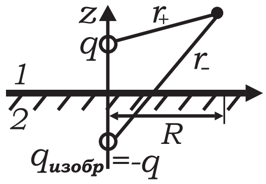
2.18. $q_B = \frac{SU}{4\pi}\left(\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\right)$, $q_A = \frac{1}{2}\left(q-\frac{SU}{2\pi d_1}\right)$, $q_C = \frac{1}{2}\left(q-\frac{SU}{2\pi d_2}\right)$.

2.19. $Q = -Uhr/d$.

2.20. $Q = -UC_2 \frac{(R_1+R_2)C_1+R_2C_3}{(R_1+R_2)(C_1+C_2+C_3)}$.

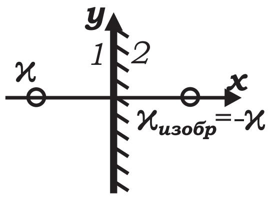
2.21. $q_i' = q_i - \bar{q}$, где $\bar{q} = \frac{1}{3}(q_1 + q_2 + q_3)$.

2.3. Метод изображений



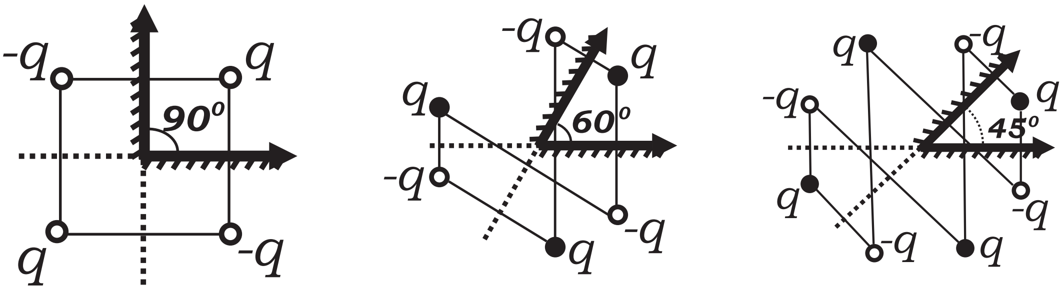
2.22. $\varphi_1 = \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-}, \varphi_2 = 0$, $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\varphi_1$, $\vec{E}_2 = 0$;

$\sigma_{инд} = -\frac{aq}{2\pi\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}$, $q_{инд} = -q$; $F_z = -\frac{q^2}{4a^2}$.



2.23. $F_x = -\frac{\varkappa^2}{a}$, $\sigma(y) = -\frac{\varkappa a}{\pi\left(a^2+y^2\right)}$.

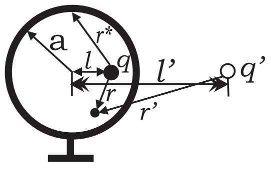
2.24. Поле внутри двугранного угла создается системой зарядов, изображенных на соответствующем рисунке.



2.25. $\varphi(0) = \frac{Q\left(\sqrt{R^2+4h^2}-R\right)}{R\sqrt{R^2+4h^2}}$, $E_z(0) = -\frac{2Qh}{\left(R^2+4h^2\right)^{3/2}}$.

2.26. $F = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{8q^2ad(2i+1)}{\left[(2i+1)^2d^2-4a^2\right]^2} \simeq \frac{8q^2a}{d^3} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^3} \simeq \frac{8q^2a}{d^3}$.

2.27. а) Заряд внутри, сфера заземлена:

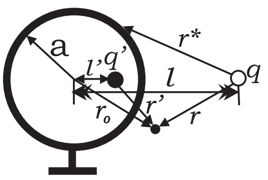


$\varphi_{внутр} = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$, $\varphi_{нар} = 0$; $\sigma_{инд}(r^*) = -\frac{q\left(a^2-\ell^2\right)}{4\pi a r^{*3}}$, $q_{инд} = \int\limits_{сф} \sigma dS = -q$.

б) Заряд внутри, сфера изолирована:

$\varphi_{внутр} = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q}{a}$; $\varphi_{нар} = 0$; $\sigma_{инд}(r^*) = \frac{q}{4\pi a^2} - \frac{q\left(a^2-\ell^2\right)}{4\pi a r^{*3}}$, $q_{инд} = 0$.

в) Заряд снаружи, сфера заземлена:



$\varphi_{\text{нар}} = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}$, $\varphi_{\text{внутр}} = 0$, $\sigma_{\text{инд}}(r^*) = -\frac{q\left(a^2-l^2\right)}{4\pi a r^{*3}}$, $q_{\text{инд}} = -q\frac{a}{\ell}$.

г) Заряд снаружи, сфера изолирована:

$\varphi_{\text{нар}} = \frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}-\frac{q'}{r_0}$, $\varphi_{\text{внутр}} = -\frac{q'}{a}$; $\sigma_{\text{инд}}(r^*) = -\frac{q'}{4\pi a^2}-\frac{q\left(a^2-\ell^2\right)}{4\pi a r^{*3}}$, $q_{\text{инд}} = 0$.

Во всех случаях $\ell' = a^2/\ell$, $q' = -qa/\ell$. $F = -\frac{q^2 a\ell}{\left(\ell^2-a^2\right)^2}$.

2 28. $U = \frac{Qq}{\ell} - \frac{q^2a^3}{2\ell^2\left(\ell^2-a^2\right)}$, $F = \frac{Qq}{\ell^2} - \frac{q^2a^3\left(2\ell^2-a^2\right)}{\ell^3\left(\ell^2-a^2\right)^2}$;

$Q = \frac{qa^3\left(2\ell^2-a^2\right)}{\ell\left(\ell^2-a^2\right)^2}$.

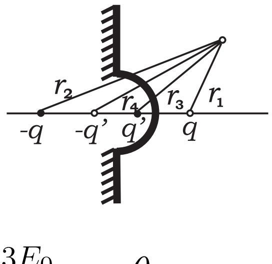
2.29. $F = \frac{q_0q}{\ell^2} + \frac{q^2a}{\ell^3} - \frac{q^2a\ell}{\left(\ell^2-a^2\right)^2}$.

2.30. а) $\varphi_{\text{нар}} = \frac{\left(\vec{P}_0\vec{R}\right)}{R^3} + \frac{\left(\vec{P}\vec{r}\right)}{r^3}$, где диполь изображения $\vec{P} = -\vec{P}_0\frac{a^3}{\ell^3}$ расположен на линии, соединяющей диполь $\vec{P}_0$ с центром сферы, на расстоянии a^2/ℓ от него; векторы $\vec{R}$ и $\vec{r}$ отсчитываются от диполя $\vec{P}_0$ и его изображения $\vec{P}$ соответственно; $\varphi_{\text{внутр}} = 0$;

б) $\sigma = -\frac{3P_0}{4\pi a^3}\cos\theta$, где θ - угол между $\vec{P}_0$ и направлением из центра сферы в точку на её поверхности.

2.31. $\varphi = 2\pi\varkappa - \frac{2\pi\varkappa\ell a}{\sqrt{h^2+\ell^2}\sqrt{\ell'^2+(h'-h)^2}}$, где $\ell' = \frac{a^2\ell}{h^2+\ell^2}$ - радиус кольца изображения, расположенного на расстоянии $h' = \frac{a^2h}{h^2+\ell^2}$ от центра полости. $E_z = -\frac{2\pi\varkappa a\ell\left(h'-h\right)}{\sqrt{h^2+\ell^2}\left[\ell'^2+(h'-h)^2\right]^{3/2}}$.

2.32. $\varphi = q/r_1 - q/r_2 + q'/r_3 - q'/r_4$, где $q' = -q\frac{a}{b}$, $b' = \frac{a^2}{b}$; r_i показаны на рисунке и $Q_{\text{инд}} = -q\left(1 - \frac{b^2-a^2}{b\sqrt{b^2+a^2}}\right)$.



2.33. $\sigma_{\text{инд}}^{\text{плоск}}(\rho) = -\frac{E_0}{4\pi}\left(1 - \frac{a^3}{\rho^3}\right)$; $\sigma_{\text{инд}}^{\text{вздут}}(\theta) = -\frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$; $F_z = \frac{9}{16}a^2E_0^2$.

2.34. $\sigma = -\frac{5\sqrt{5}-1}{20\pi\sqrt{5}}\frac{Q}{a^2}$.

2.35. а) $\varphi(z) = \frac{q}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{qa}{\sqrt{a^4+b^2z^2}}$;

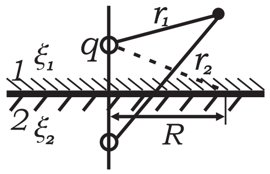
б) $\varphi(r,\theta) = \frac{q}{r}\left(1-\frac{a}{b}\right) + \frac{qb^2}{4r^3}\left(1-\frac{a^5}{b^5}\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right)$.

2.36. а) $\varphi(z) = \frac{Q}{\sqrt{b^2+z^2}} + \frac{Q'}{\sqrt{b'^2+(z+a-z')^2}} - \frac{Q'}{|z+a|}$, где $b' = b\frac{a^2}{a^2+b^2}$ — радиус кольца изображения, $Q' = -Q\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ — его заряд и $z' = \frac{a^3}{a^2+b^2}$ — расстояние от его плоскости до центра сферы;

б) $\varphi(r,\theta) = \frac{Q}{r} + \frac{Qa^4\cos\theta}{\left(a^2+b^2\right)^{3/2}r^2}$.

2.37. $F_r = \frac{2\varkappa^2 a}{\ell^2-a^2}$.

2.38. $\sigma(R) = -\frac{aq}{2\pi\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}$.



2.39. $\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{1}{\varepsilon_1}q\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r_2}$,

$\varphi_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}q\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{r_1}$.

2.40. $\sigma_{\text{связ}} = \frac{q}{\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{a}{2\pi R^3}$,

при $\varepsilon_2 \longrightarrow \infty$, $\sigma_{\text{связ}} = -\frac{qa}{2\pi\varepsilon_1 R^3}$ (ср. с задачей 2.22.)

2.41. $F_z = \frac{3p^2}{16h^4}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$, $N = 0$.

2.42. $F_z = -\frac{2\varkappa^2}{\varepsilon_1 h}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

2.43. $F = \frac{q_1^2}{4a^2\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \frac{2q_1q_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)a^2} + \frac{q_1q_3}{2a^2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}$.

2.44. $F_1 = \frac{q_1^2}{4a^2\varepsilon_1}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \frac{q_1q_2}{4a^2\varepsilon_1}\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$, $F_2 = \frac{q_2^2}{4a^2\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \frac{q_2q_1}{4a^2\varepsilon_2}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$.

2.4. Энергия поля. Давление. Силы

2.45. $A_{\text{нов}} = A/\sqrt{2}$, так как $A \sim q^2/\ell$.

2.46. $A_{\text{нов}} = 6A$.

2.47. а) $\Delta W = \frac{(1-\varepsilon)CU^2}{2}$; б) $\Delta W = \frac{(1-\varepsilon)Q^2}{2\varepsilon C}$, $A = \Delta W$, $C = \frac{S}{4\pi d}$.

2.48. $W = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$.

2.49. $W = \frac{5}{4}\frac{e^2}{a}$.

2.50. $W = \frac{(\vec{p}_1\vec{p}_2)}{r^3} - \frac{3(\vec{p}_1\vec{r})(\vec{p}_2\vec{r})}{r^5} = \frac{p_1p_2}{r^3}\left(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi - 2\cos\theta_1\cos\theta_2\right)$,

где $\theta_1 = \left(\widehat{\vec{r},\vec{p}_1}\right)$, $\theta_2 = \left(\widehat{\vec{r},\vec{p}_2}\right)$, φ — угол между плоскостями $(\vec{p}_1,\vec{r})$ и $(\vec{r},\vec{p}_2)$; $F_r = 3W/r$, F максимальна, когда диполи параллельны, и равна $F_{\max} = -6p_1p_2/r^4$ (притяжение!).

2.51. $W = -\frac{p^2}{16\varepsilon a^3}\left(1+\cos^2\theta\right)$, где $\theta = (\widehat{\vec{p},\vec{e}_z})$;

$F_z = -\frac{3W}{a}$, $N_\theta = -\frac{p^2\sin 2\theta}{16\varepsilon a^3}$.

2.52. $W = -\frac{Q(\vec{p}_0\vec{r}^*)}{2\varepsilon r^{*3}} + \frac{(\vec{p}_0\vec{p})}{2\varepsilon r^{*3}} - \frac{3(\vec{p}_0\vec{r}^*)(\vec{p}\vec{r}^*)}{2\varepsilon r^{*5}}$, где заряд изображения $Q = \frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3}R$ и диполь изображения $\vec{p} = -\vec{p}_0\frac{R^3}{r^3} + 2\frac{(\vec{p}_0\vec{r})\vec{r}}{r^2}\frac{R^3}{r^3}$ отстоят от диполя $\vec{p}_0$ на расстояние $r^* = r - R^2/r$, а $\vec{r},\vec{r}^*$ — радиус-векторы положения диполя $\vec{p}_0$ и его изображений соответственно.

Если $\theta = \left(\widehat{\vec{p},\vec{r}}\right)$, то $W = -\frac{p_0^2R\left(R^2+r^2\cos^2\theta\right)}{2\varepsilon\left(r^2-R^2\right)^3}$,

$F_r = -\frac{p_0^2Rr}{\varepsilon}\frac{\left(R^2+2r^2\right)\cos^2\theta+3R^2}{\left(r^2-R^2\right)^4}$, $N_\theta = -\frac{p_0^2Rr^2\sin 2\theta}{2\varepsilon\left(r^2-R^2\right)^3}$.

2.53. $F_{\text{верх}} = \varepsilon F_{\text{нижн}} = 2\pi q^2/\ell^2$.

2.54. $h = \frac{\varepsilon-1}{8\pi\rho g}\frac{\mathcal{E}^2}{d^2}$.

2.55. $F = \frac{2\pi Dd(D-d)q^2}{a[b(D-d)+xd]^2}$.

2.56. $q = R(\varepsilon+1)\sqrt{\frac{2}{\varepsilon-1}\left(\frac{2}{3}\pi R^3\rho g - mg\right)}$.

2.57. $Q = -q/2$.

2.58. $F = q^2/4R^2$.

2.59. $F = (9/16)\cdot E_0^2a^2$.

2.60. $\sigma = \pi R^2\left(1+2\sqrt{\frac{e^2/R}{mv^2}}\right)$.

2 61. а) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi R^2}{8}\frac{e^2/R}{mv^2/2}\theta^{-3}$; б) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi R^2}{8}\sqrt{\frac{3}{\pi}\frac{e^2/R}{mv^2}}\theta^{-5/2}$;

в) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\pi R^2}{8}\sqrt{\frac{3}{\pi}\frac{e^2/R}{mv^2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}}\theta^{-5/2}$; г) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16}\sqrt[3]{\frac{15\pi}{2}\frac{\beta e^3}{mv^2}}\theta^{-7/2}$.

3.1. Сохранение заряда. Граничные условия. Закон Ома

3.1. $j_{\text{верх}} = envr/2$, $j_{\text{нижн}} = enva^2/2r$.

3.2. $\vec{j} = \vec{j}_0$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2qE\ell/m}$, $n = j_0/(qv)$.

3.3. $\tau = \varepsilon / (4\pi\sigma)$.

3.4. $\operatorname{tg}\alpha_1 / \operatorname{tg}\alpha_2 = \sigma_1/\sigma_2$, где α — угол «падения» линии тока на поверхность раздела.

3.5. $\varphi(r) = U[1-(a/r)^n]/[1-(a/b)^n]$; $R = [(b/a)^n - 1] / (2\pi\sigma_{\max} n)$, где $\sigma_{\max} = \alpha b^n$.

3.6. $\varphi(r) = U\left(\ln \frac{r}{R_1}\right) / \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)$.

3.7. $j_\alpha = \frac{\sigma U/(2\pi - \alpha_0)}{r}$, $R = \frac{2\pi-\alpha}{\sigma \ln b/a}$.

3.8. $\sigma_{R_1} = \frac{Jz}{4\pi^2 R_1^3 \sigma} \frac{1}{\ln R_1/R_2}$, $\sigma_{R_2} = -\frac{Jz}{4\pi^2 R_1^2 R_2 \sigma} \cdot \frac{1}{\ln R_1/R_2}$.

z — координата вдоль оси цилиндра. Сечение, на котором $\sigma_{R_1} = \sigma_{R_2} = 0$, не определено и может быть смещено по z сообщением проводу добавочного постоянного заряда.

3.9. $E_{1,2} = \frac{\sigma_{2,1} U}{\ell_1\sigma_2 + \ell_2\sigma_1}$, $\sigma_{\text{своб}} = \frac{(\sigma_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sigma_2)}{4\pi(\ell_1\sigma_2+\ell_2\sigma_1)} U$, $\sigma_{\text{связ}} = -\frac{\sigma_1(\varepsilon_2-1)-\sigma_2(\varepsilon_1-1)}{4\pi(\ell_1\sigma_2+\ell_2\sigma_1)} U$.

К положительно заряженной обкладке конденсатора прилегает первый слой.

3.10. $\varphi(x) = U\frac{\ln(1+\alpha x/\sigma_1)}{\ln(1+\alpha d/\sigma_1)}$, $\rho(x) = \frac{U\alpha^2}{4\pi(\sigma_1+\alpha x)^2}$.

3.11. $\sigma_{\text{своб}} = \frac{U}{4\pi c^2} \frac{\sigma_2\varepsilon_1 - \sigma_1\varepsilon_2}{\sigma_1(1/c-1/b)+\sigma_2(1/a-1/c)}$.

3.12. $E_0 = -k(\sigma_2\ell_1 + \sigma_1\ell_2)\mathcal{E}_0$, $E_1 = k\sigma_2\ell_0\mathcal{E}_0$, $E_2 = k\sigma_1\ell_0\mathcal{E}_0$, где $k = \sigma_0 / [\ell_0(\ell_0\sigma_1\sigma_2 + \ell_1\sigma_0\sigma_2 + \ell_2\sigma_0\sigma_1)]$, $\mathcal{E}_0 = E_{\text{стор.}} \cdot \ell_0$ — эдс источника. Внутри источника поле и ток противоположно направлены $(E_0 < 0)$. Заряды сосредоточены на границах раздела проводников и равны $q_{01} = r^2(E_1 - E_0)/4$, $q_{12} = r^2(E_2 - E_1)/4$,
$q_{20} = r^2(E_0 - E_2)/4$.

3.13. $(j_i)_r = \frac{U\sigma_i}{r \ln b/a}$, $i = 1, 2$.

3.14. $J = \left(\alpha U - R - r_0 + \sqrt{(\alpha U - R - r_0)^2 + 4\alpha U R}\right) / 2\alpha R$.

3.15. Ток в звене $A_k A_{k+1}$ равен $J_k = \frac{\mathcal{E}\operatorname{ch}(\beta-k)\alpha}{R_i \operatorname{ch}\beta\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{sh}(\beta+1/2)\alpha}$, где параметры α и β определяются из $\operatorname{sh}(\alpha/2) = \sqrt{R/r}/2$ и
$\operatorname{tg}\beta\alpha = \frac{R_a \operatorname{ch} n\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{sh}(n+1/2)\alpha}{R_a \operatorname{sh} n\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{ch}(n+1/2)\alpha}$. Ток нагрузки равен J_n. При сухой изоляции $(r \to \infty, \alpha \to 0, \beta \to n + 1/2 + R_a/R)$ искомое отноше-

ние эдс равно $\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{R_i \operatorname{ch}\beta\alpha + \sqrt{Rr} sh(\beta+1/2)\alpha}{[R_i+R_a+(n+1)R]\operatorname{ch}(\beta-n)\alpha}$. При $R_a = 0$ $\beta = n + 1/2$.

3.16. $\varphi(x) = -\rho_0 \frac{dJ}{dx}$, $J = -\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d^2J}{dx^2} = J\frac{\rho}{\rho_0}$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi\frac{\rho}{\rho_0}$. Размерности величин: $[\rho] =$ Ом/см, $[\rho_0] =$ Ом$\cdot$ см.

3.17. $J(x) = \frac{\mathcal{E}\operatorname{ch}\Omega(x-x_0)}{R_i \operatorname{ch}\Omega x_0 + \sqrt{\rho\rho_0}\operatorname{sh}\Omega x_0}$, где $\Omega = \sqrt{\rho/\rho_0}$, а x_0 определяется из $\operatorname{th}\Omega(x_0 - a) = -R_a/\sqrt{\rho\rho_0}$. При $R_a = 0$ (закороченная линия) $J(x) = \frac{\mathcal{E}\operatorname{ch}\Omega(a-x)}{R_i\operatorname{ch}\Omega a + \sqrt{\rho\rho_0}\operatorname{sh}\Omega a} \simeq \frac{\mathcal{E}}{\Omega a}\frac{\operatorname{ch}\Omega(a-x)}{R_i+\rho_0/\ell}$. Для сухой изоляции $(1/\rho_0 \to 0)$ $J(x) = \mathcal{E}/(R_i + R_a + \rho\ell) = \mathrm{const}$.

3.18. $R = \frac{1}{2\pi\sigma_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2\pi\sigma_1}\frac{1}{b}$.

3.19. $R = \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{4}{\ell}\right) \simeq \frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$.

3 20. $C = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma R}$.

3.21. $R = \frac{\pi + \ln \ell/a}{2\pi\sigma\ell}$, $E \simeq \frac{U\ell}{2r^2 \ln \ell/a}$, $\Delta \mathrm{U}_{\text{шаг}} \simeq \frac{U\ell\lambda}{2r^2\ln\ell/a}$.

3.22. $k = 4\pi\sigma/\omega$.

3.23. а) $\vec{E} = 0$, при $r < R_1$, $E_r \sim e^{-\frac{4\pi\sigma t}{\varepsilon}}$ при $R_1 < r < R_2$, $E_r = \frac{q}{r^2} = \mathrm{const}$ при $r > R_2$; б) $Q = \frac{q^2}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.

3.24. $\vec{j}_{\text{нар}} = \vec{j}_0\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{3}{2}\frac{(\vec{j}_0\vec{r})\vec{r}R^3}{r^5}$, $\vec{j}_{\text{внутр}} = 0$.

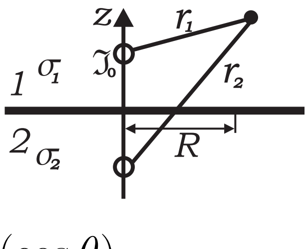
3.25. $\sigma = \sigma_0\left(1 - 2\pi n a^3\right)$.

3.26. $J/J_0 = \frac{1+\Delta\sigma/\sigma_0}{1+\Delta\sigma/3\sigma_0}$.

3.27. $J = \frac{3\pi a^2\sigma_1}{\sigma_1+2\sigma_0} j_0 \simeq 3\pi a^2 j_0$.

3.28. $J/J_0 = \frac{4\sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1+\sigma_2)^2 - (\sigma_1-\sigma_2)^2 a^2/b^2}$.

3.29. $\varphi_1 = \frac{J_0}{4\pi\sigma_1}\frac{1}{r_1} + \frac{J_0}{4\pi\sigma_1}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{1}{r_2}$,
$\varphi_2 = \frac{J_0}{4\pi\sigma_1}\frac{2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{1}{r_1}$, $\vec{j}_i = -\sigma_i\vec{\nabla}\varphi_i$.



3.30. $j_\theta(\theta) = \frac{J\sin\theta}{4\pi Ra}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{R}{a}\right)^n P'_n(\cos\theta)$, $P_n(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра.

3.31. $T = eU - \frac{eJ}{v_0}\left(1 + 2\ln b/a - r^2/a^2\right)$, где v_0 — продольная скорость электронов.

3.2. Закон «трех вторых»

3.32. $j = \frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{U^{3/2}}{d^2}$.

3.33. $j = \frac{cU}{2\pi d^2}$.

3.34 $\Delta j \simeq j_0\sqrt{kT/eU}$, где j_0 — плотность тока в диоде без учета тепловых скоростей электронов, которые вылетают из катода, имеющего температуру T.

3.35. В четыре раза.

3.36. $E_a = \left[16\pi\sqrt{\frac{mU}{2e}}je\,(1-\alpha)\right]^{1/2}$, где $\alpha = \frac{j_i}{j_e}\sqrt{\frac{M}{m}}, j_i \le j_e\sqrt{\frac{m}{M}}$. При максимальном токе ионов $(\alpha = 1)$ 1.63$\le j_e/j_0 \le 1.97$, где j_0 — плотность тока вакуумного диода, соответствующая закону "3/2".

3.37. $j = \frac{9}{32\pi}\frac{kU^2}{d^3}$, где k — подвижность электронов ($[k] = \sqrt{\text{см}^3/\text{г}}$).

3.38. $J_{\text{пог}} = \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{U^{3/2}}{a}$.

3.39. $U(t) = U_0/\left(1 + P\sqrt{U_0}t/2C\right)^2$.

3.40. $j_{\max} = j_0\left(\frac{d_0}{2d}\right)^2\left[1 + \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{3/4}\right]^2$, где $j_0 = \frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{U_1^{3/2}}{d_0^2}$ — ток эмиссии плоского диода (ширина d_0, напряжение U_1) в дрейфовое пространство между плоскостями 1, 2; $x_{\text{вирт}} = \frac{2d}{1+(U_1/U_2)^{3/4}}$.

3.41. $F_E/F_M \sim \frac{c^2}{v^2}\frac{d^2}{r^2} \approx \frac{d^2}{r^2} \ll 1$.

3.42. $J_{\text{пред}} = \frac{mc^3}{e}\frac{\beta\gamma r}{d}$, где $\frac{mc^3}{e} \simeq 17kA$ — параметр Будкера.

3.43. $\varphi \sim \rho d^2 \simeq jd^2/c \simeq J_0\,(d/a)^2$.

4.1. Закон Био — Савара. Теорема Стокса. Суперпозиция полей

4.1. $H_z = \frac{2\pi Ja^2}{c\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$. а) $H_z = \frac{2\pi Jn}{c}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right)$, где $\alpha_{1,2} = \arccos\frac{\ell\mp z}{\sqrt{a^2+(\ell\mp z)^2}}$ — углы, под которыми видны края соленоида из точки z; б) $H_z(0) = 2\pi Jn/c$; в) $H_z = 4\pi Jn/c$.

4.2. $H_z(h) = \frac{2Q\omega}{ca^2}\frac{a^2+2h^2-2h\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

4.3. а) $H_z(0) = \frac{\pi JN}{cR}$. б) $H_z(0) = \frac{2}{3}\frac{Q\omega}{cR}$.

4.4. а) $H = \frac{4\pi i}{c}$ между плоскостями и $H = 0$ вне них; б) $H = 0$ между плоскостями и $H = \frac{4\pi i}{c}$ вне них. В обоих случаях $\vec{H}$ направлено вдоль плоскостей и перпендикулярно току.

4.5. $H_r = H_z = 0$ всюду; $H_\alpha = \frac{2Jr}{ca^2}$ при $r \le a$, $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$ при $a \le r \le b$ и $H_\alpha = 0$ при $r > b$.

4.6. $H_0 = \left(\frac{W}{\rho a}\right)^{1/2} \frac{1}{c}\sqrt{\frac{8\pi\beta}{\alpha^2-1}} \ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{1+\sqrt{1+\beta^2}}$, где ρ — удельное сопротивление проводника. H_0 максимально при $\alpha = 3$ и $\beta = 2$; при этом $H_0\,[\text{Э}] = 0,179\left(\frac{W[\text{Вт}]}{\rho[\text{Ом·см}]a[\text{см}]}\right)^{1/2}$.

4.7. $\operatorname{tg}\alpha = 2\ell/4\pi Na$.

4.8. $H_x = H_z = 0$, $H_y = \frac{2\pi j}{c}d$, где $j = \frac{J}{\pi\left(b^2-a^2\right)}$ — плотность тока, ось Y перпендикулярна плоскости, проходящей через оси цилиндров.

4.9. $H_x = H_z = 0$, $H_y = \frac{2\pi j}{c}d$, ось Y перпендикулярна плоскости, проходящей через оси проводников.

4.10. $H_z = H_r = 0$, $H_\alpha = \frac{2JN}{cr}$, где r — расстояние от вертикальной оси тора.

4.11. $H_x = \frac{2J}{ca}\left(\operatorname{arctg}\frac{a+2x}{2y} + \operatorname{arctg}\frac{a-2x}{2y}\right)$, $H_y = \frac{J}{ca}\ln\frac{(x-a/2)^2+y^2}{(x+a/2)^2+y^2}$, $H_z = 0$; ось Y перпендикулярна полосе и проходит через её середину, при $a \ll x, y$, $H_x = \frac{2Jy}{cR^2}$, $H_y = -\frac{2Jx}{cR^2}$, $H_z = 0$, $\left(R = \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

4.12. $H_r = H_z = 0$ всюду; $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$ над плоскостью, $H_\alpha = 0$ под ней. Для полубесконечного тока $H_r = H_z = 0$, $H_\alpha = \frac{J}{cr}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$.

4.13. $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$ в воздухе; $H_\alpha = \frac{2J}{cr}(1-\cos\theta)$, θ — угол в сферической системе координат.

4.14. $H_z(r,z) = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}}\left(1 - 1,670\frac{r^2}{R^2} - 1,152\frac{z^4}{R^4}\right)\frac{J}{cR}$, где расстояния r, z отсчитываются от середины отрезка O_1O_2 поперек и вдоль него соответственно. Область однородности поля с заданной величиной δ есть цилиндр радиуса $r = R\sqrt{\delta/1,67}$ и длины $\ell = 2R\sqrt[4]{\frac{\delta}{1,152}}$. r=0,775 см и ℓ=6,1 см; $V = \pi r^2\ell$=11,5 см^3.

4.2. Векторный потенциал, магнитный диполь. Силы, действующие на магнитный диполь. Прецессия магнитного момента

4.15. 1) Пусть поле $\vec{H}$ направлено вдоль Z, тогда: а) $A_x = -H \cdot y$, $A_y = A_z = 0$ или $A_x = -H \cdot y/2$, $A_y = H \cdot x/2$, $H_z = 0$; б) $A_r = A_z = 0$, $A_\alpha = H \cdot r/2$; в) $A_r = A_\theta = 0$, $A_z = Hr\sin\theta/2$.

2) Если ток J течет вдоль оси Z, то $A_r = A_\alpha = 0$ и $A_z = -\frac{2J}{c}\ln r$.

3) Если ось Z совпадает с осью витка, то $A_r = A_z = 0$ и $A_\theta = \frac{\pi a^2 Jr}{c\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$ при $a \ll \sqrt{r^2+z^2}$.

4.16. $A_r = A_\alpha = 0$, $A_z = \frac{J}{c}\ln\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}$; $H_x = -\frac{8J}{c}\frac{axy}{r_1^2 r_2^2}$, $H_y = \frac{2J}{c}\left(\frac{a-x}{r_1^2} + \frac{a+x}{r_2^2}\right)$, $H_z = 0$, где $r_1(r_2)$ - расстояния до точки наблюдения (x, y) в плоскости, перпендикулярной токам, от тока $J(-J)$, находящегося в точке $(a, 0)(-a, 0)$ соответственно.

4.17. $\vec{H} = -\frac{4\pi J}{ca}\vec{e}_x + \operatorname{rot}\vec{A}$, где вектор-потенциал $\vec{A} = (0, A_y, 0)$; $A_y = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n e^{-2\pi nz/a}\sin\left(\frac{2\pi nx}{a} + \varphi_n\right)$. Коэффициенты β_n, φ_n подбираются так, чтобы были выполнены граничные условия на поверхности проводников.

4.18. а) $A_r = A_\theta = 0$, $A_z \simeq \frac{4Ja}{cr}\cos\theta$ или $\vec{A} = 2\frac{[\vec{m}\times\vec{r}]}{r^2}$, где $\vec{m} = 2J\left[\vec{a}\vec{e}_z\right]$ - магнитный момент системы ($2\vec{a}$ - вектор от тока $-J$ к току J в плоскости, перпендикулярной токам), r — радиус-вектор точки наблюдения в этой же плоскости из середины расстояния между токами; б) $H_r = -\frac{4Ja}{cr^2}\sin\theta$, $H_\theta = \frac{4Ja}{cr^2}\cos\theta$, $H_z = 0$ или $\vec{H} = -\frac{2\vec{m}}{r^2} + \frac{4(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^4}$.

4.19. $A_x = A_y = 0$, $A_z = \frac{4Jr^2}{ca^2}\cos 2\alpha$; $H_x = \frac{8J}{ca^2}y$, $H_y = \frac{8J}{ca^2}x$, $H_z = 0$.

4.20. $A_r = A_\theta = 0$, $A_z = -\frac{2\pi ja\delta}{c}\ln a$.

4.21. $A_r = A_\theta = 0$, $A_z = -\frac{6J}{c}\ln r + \frac{4Ja}{\pi cr}\cos\theta$; $H_r = -\frac{4Ja}{\pi cr^2}\sin\theta$, $H_\theta = \frac{6J}{cr} + \frac{4Ja}{\pi cr^2}\cos\theta$, $H_z = 0$.

4.22. $\vec{m} = \frac{ea^2}{3c}\vec{\omega}$ для сферы и $\vec{m} = \frac{ea^2}{5c}\vec{\omega}$ для шара.

4.23. Вне шара (сферы) $\vec{H} = -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{m}$ — магнитный момент шара (сферы). Внутри сферы $\vec{H} = \frac{2e\vec{\omega}}{3ca} = \frac{2\vec{m}}{a^3}$; внутри шара $\vec{H} = \frac{5\vec{m}}{a^3} - \frac{6\vec{m}^*}{r^3} + \frac{3(\vec{m}^*\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{m}^*$ — момент шара радиуса r, $\vec{m}$ — момент всего шара.

4.24. $\vec{H} = \frac{q_m\vec{r}}{r^3}$, где $q_m = \frac{JnS}{c}$ — магнитный заряд соленоида.

4.25. $\vec{F} = 0$, $\vec{N} = \left[\vec{m} \times \vec{H}\right]$, где $\vec{m} = \frac{J}{c}\int \vec{n}ds$ — магнитный момент контура.

4.26. $U = \frac{(\vec{m}_1\vec{m}_2)}{r^3} - \frac{3(\vec{m}_1\vec{r})(\vec{m}_2\vec{r})}{r^5}$; $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \frac{3}{r^5}\left[\vec{m}_2\left(\vec{m}_1\vec{r}\right) + \right.$ $\left.+\vec{m}_1\left(\vec{m}_2\vec{r}\right) + \vec{r}\left(\vec{m}_1\vec{m}_2\right)\right] - \frac{15}{r^7}\left(\vec{m}_1\vec{r}\right)\left(\vec{m}_2\vec{r}\right)\vec{r}$, где r — радиус-вектор от первого тока ко второму. $\vec{N}_i = \frac{[\vec{m}_2\times\vec{m}_1]}{r^3} + \frac{3[\vec{m}_i\times\vec{r}](\vec{m}_{i+1}\cdot\vec{r})}{r^5}$ для $i = 1, 2\,(i+1 = 2, 1)$.

При параллельных диполях ($\vec{m}_1 = m_1\vec{n}$, $\vec{m}_2 = m_2\vec{n}$, $\vec{r} = r\vec{r}_0$, $\vec{n}, \vec{r}_0$ - единичные векторы), $\vec{F}_2 = \frac{3m_1m_2\left[2\vec{n}(\vec{n}\vec{r}_0) - \vec{r}_0(5\vec{n}\vec{r}_0)^2 - 1\right]}{r^4}$.

4.28. $F \simeq \frac{3q_1q_2a_1^2a_2^2\omega_1\omega_2}{25c^2\ell^4} + \frac{q_1q_2}{\ell^2}$.

4.29. а) $h = R\left(3J^2\pi^2/\left(8c^2P\right)\right)^{1/4}$; б) $h = 2\pi RJ^2/\left(c^2P\right)$.

4.30. $\vec{F} = \vec{\nabla}\left(\vec{m}\vec{H}\right)$.

4.31. $v \simeq H_0\sqrt{\frac{a^3}{4m}} \simeq \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \simeq 80$ м/с, где ρ — плотность материала шарика.

4.32. $F \simeq 6\gamma\beta^2\left(\frac{1-\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^2\frac{B^2a^6}{\ell^4}$.

4.33. $\vec{m} = g\vec{M} = \frac{e}{2mc}\vec{M}$.

5.1. Граничные условия для магнитного поля. Метод изображений. Постоянные магниты. Магнитные цепи

5.1. Вне сферы $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$, $H_z = H_r = 0$; $\vec{H} = 0$ внутри нее. $\vec{B}_i = \mu_i\vec{H}$.

5.2. $H_r = H_z = B_r = B_z = 0$ всюду; $H_\alpha = B_\alpha = \frac{2Jr}{ca^2}$ при $r \leq a$, $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$ и $B_\alpha = \frac{2\mu_1 J}{cr}$ для $z > 0$ и $B_\alpha = \frac{2\mu_2 J}{cr}$ для $z < 0$ при $r > a$.

5.3. $B_r = B_z = 0$ всюду, $(B_\alpha)_i = \mu_i \frac{2J}{cr}$ для $i = 1, 2$ при $a \le r \le b$; $B_\alpha = \frac{2J}{cr}$ в остальном пространстве.

5.4. $B_\alpha = \frac{2J}{cr}\frac{2\pi}{(\alpha_1/\mu_1+\alpha_2/\mu_2+\alpha_3/\mu_3)}$, $H_{\alpha i} = B_\alpha/\mu_i$, $i = 1, 2, 3$.

5.5. $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\vec{B}\vec{n}\right)\vec{n}$, где $\vec{B}$ — индукция в среде, $\vec{n}$ — нормаль к щели.

5.6. $(A_z)_{\text{внутр}} = -\frac{\mu_1 J r^2}{ca^2} + \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2} H_0 r \sin\alpha$,

$(A_z)_{\text{нар}} = \frac{2\mu_2 J}{c}\ln\frac{a}{r} + \left(1 + \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\frac{a^2}{r^2}\right)\mu_2 H_0 r\sin\alpha$; $A_r = A_\alpha = 0$ всюду; $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$ всюду.

5.7. $\vec{H}_{\text{внутр}} = \frac{3\mu_2\vec{H}_0}{\mu_1+2\mu_2}$, $\vec{H}_{\text{нар}} = \vec{H}_0 - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $m = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}\vec{H}_0 a^3$ — индуцированный магнитный момент, приобретаемый шаром. Плотность объемных токов $\vec{j}_{\text{мол}} = 0$, а поверхностных токов —

$i_\alpha = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2} c H_0 \sin\theta$.

5.8. $\vec{H}_{\text{внутр}} = \frac{3\mu}{1+2\mu}\vec{H}_0$.

5.9. $\vec{H}_{\text{внутр}} = \frac{3\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}\vec{H}_0 - \frac{4\pi\vec{M}_0}{\mu_1+2\mu_2}$, $\vec{H}_{\text{нар}} = \vec{H}_0 - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где магнитный момент шара $\vec{m} = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}a^3\vec{H}_0 + \frac{4\pi}{\mu_1+2\mu_2}a^3\vec{M}_0$.

5.10. $H_{\text{внутр}} = 0$, $\vec{H}_{\text{нар}} = \vec{H}_0 - \frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{m} = -\frac{1}{2}a^3\vec{H}_0$. Плотность объемных токов $\vec{j}_{\text{мол}} = 0$, а поверхностных — $i_\alpha = -\frac{3}{8\pi}cH_0\sin\theta$.

5.11. $\vec{F} = \frac{9}{64}H^2a^2\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)$, α — угол между $\vec{H}$ и нормалью к плоскости разреза сферы.

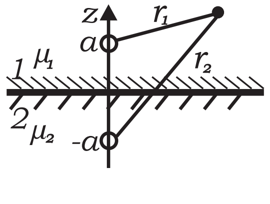
5.12. $\vec{H}_{\text{внутр}} = \frac{4\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)^2-(\mu_1-\mu_2)^2a^2/b^2}\vec{H}_0$; при $\mu_1 \gg \mu_2$

$\vec{H}_{\text{внутр}} = \frac{4\mu_2/\mu_1}{1-a^2/b^2}\vec{H}_0$.

5.13. $\vec{H}_1 = \frac{2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\vec{H}_0$, $\vec{H}_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\vec{H}_0$.

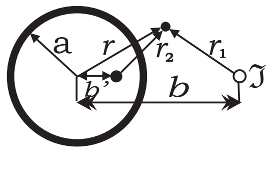
5.14. $A_{1z} = -\frac{2\mu_1 J}{c}\ln r_1 - \frac{2\mu_1 J}{c}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\ln r_2$,

$A_{2z} = -\frac{2\mu_2 J}{c}\frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\ln r_1$, $\vec{B}_i = \operatorname{rot}\vec{A}_i = \mu_i H_i$, $i = 1, 2$.



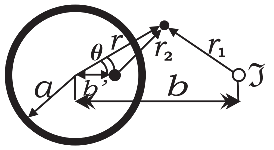
5.15. $F_z = \frac{J_1}{c^2a}\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\left(J_1\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2} + 4J_2 + 2J_3\right)$.

5.16. $(A_z)_{\text{внутр}} = -\frac{2J}{c}\frac{2\mu}{1+\mu}\ln r_1 + c_1$,



$(A_z)_{\text{нар}} = -\frac{2\mu J}{c}\ln r_1 - \frac{2\mu J}{c}\frac{1-\mu}{1+\mu}\ln r_2 + \frac{2\mu J}{c}\frac{1-\mu}{1+\mu}\ln r + c_2$, где $r_1^2 = r^2 + b^2 - 2br\cos\theta$, $r_2^2 = r^2 + b'^2 - 2rb'\cos\theta$, $b' = a^2/b$, а c_1 и c_2 связаны соотношением $c_1 - c_2 = \frac{2\mu J}{c}\frac{1-\mu}{1+\mu}\ln a$.

$F_r = \frac{2J^2a^2/b}{c^2\left(b^2-a^2\right)}\frac{1-\mu}{1+\mu}$.



5.17. $(A_z)_{\text{внутр}} = -\frac{2J}{c}\ln r_1 + \frac{2J}{c}\frac{1-\mu}{1+\mu}\ln r_2 + c_1$,

$(A_z)_{\text{нар}} = \frac{2\mu J}{c}\frac{2}{1+\mu}\ln r_1 + \frac{2\mu J}{c}\frac{1-\mu}{1+\mu}\ln r + c_2$, где r_1 и r_2 те же, что и в задаче 5.16, а $c_1 - c_2 = \frac{2J}{c}\frac{1-\mu}{1+\mu}\left[(\mu-1)\ln a - \ln b\right]$. $F_r = \frac{2J^2a}{c^2\left(b^2-a^2\right)}\frac{\mu-1}{\mu+1}$.

5.18. $F_z = \frac{3}{16}\frac{m^2}{a^4}\frac{\mu-1}{\mu+1}\left(1+\cos^2\theta\right)$, $N = \frac{m^2}{16a^3}\frac{\mu-1}{\mu+1}\sin 2\theta$, θ — угол между $\vec{m}$ и нормалью к границе раздела.

5.19. $H = \frac{4\pi Jn}{c(d+\ell_{\text{жел}}S/\mu S_{\text{жел}})} \simeq \frac{4\pi JN}{cd}$.

5.20. $H(x) = H_0e^{-kx}$, $k^2 = \frac{2}{\mu bh}$, $H_0 = 4\pi JN/cb$.

5.21. $H_1 = \frac{4\pi JN}{c}\frac{R^2-a^2}{\ell R^2}$, $H_2 = \frac{4\pi JN}{c}\frac{a^2}{\ell R^2}$.

5.22. $H(x) \simeq H_0e^{-3x/d}$.

5.23. $\vec{H}_{\text{внутр}} = \frac{8\pi}{\mu+2}\vec{M}_0$, $\vec{H}_{\text{нар}} = -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, где $\vec{m} = \frac{4\pi a^3}{\mu+2}\vec{M}_0$, $\vec{M}_0$ — намагниченность магнетика магнита.

5.24. $B_{\max} = \frac{B_0}{1+B_0/2H_0} \simeq 2H_0 = 200$ Гс.

5.25. $H = \frac{2dH_c}{h+2dH_c/B_1} \approx 1$ кГс.

5.2. Взаимодействие токов с магнитным полем. Энергия и давление поля

5.26. Пружина сожмется на величину $\Delta x \simeq \left(\frac{2\pi JNr}{c\ell\sqrt{k}}\right)^2$.

5.27. Положение жилы неустойчиво при $r \ll R$ и устойчиво при $r \simeq R$.

5.28. $p = \frac{(\mu-1)H^2}{8\pi}$.

5.29. $T = \frac{JHR}{c} = 0,1$ г.

5.30. $F = \frac{4\pi J_1J_2}{c}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$.

5.31. $F = -\frac{\partial W}{\partial r}$, $N = \frac{\partial W}{\partial \alpha}$, где
$W = -\frac{J_1 J_2 a}{c^2} \ln \frac{4r^2+a^2+4ar\cos\alpha}{4r^2+a^2-4ar\cos\alpha}$.

5.32. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BU}{\rho \ell c d g}$.

5.33. $p = \frac{J^2}{2\pi c^2 R^2}$.

5.34. $F(r) = 2\pi n e^2 r/\gamma^2 = \frac{2Jer}{a^2 \beta c \gamma^2}$, где $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

5.35. $F_z = \left(\frac{\pi J N R^2}{c\ell}\right)^2 \left(\frac{2h}{\left(4h^2+\ell^2\right)^{3/2}} - \frac{1}{4h^2}\right)$, где ось Z перпендикулярна сверхпроводящей плоскости.

6.1. Индуктивность. Взаимная индукция

6.1. $L = 2\mu \ln b/a$.

6.2. $L = \mu/2$

6.3. $L = 2\mu_2 \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{2\mu_1 R_2^4}{(R_2^2-R_1^2)^2} \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\mu_1 R_2^2}{R_2^2-R_1^2}$.

6.4. а) $H_r = H_z = 0$ всюду, $H_\alpha = \frac{2J}{cr}$ внутри сферы и $H_\alpha = 0$ вне сферы; б) $L \approx 4R \ln(R/r_0)$.

6.5. $L = \frac{4\pi(S_1-S_2)\mu}{\ell}$.

6.6. $L' = \frac{2\mu}{\mu+1} L$.

6.7. $L = 4\pi n^2 S$.

6.8. $L = \frac{4\pi N^2 S}{h_2}\left(1 + (\mu-1)\frac{h_1}{h_2}\right)$.

6.9. $L = 4\pi N^2 \left(b - \sqrt{b^2-a^2}\right)$, $L \to 4\pi n^2 S$ (где $n = N/(2\pi b)$). Для прямоугольного сечения $L = 2N^2 h \ln \frac{2b+a}{2b-a}$. Если ток течет по оболочке тора, то L уменьшится в N^2 раз.

6.10. $L = \frac{8\pi^2 \mu N^2 a}{3(\mu+2)}$.

6.11. $L = \frac{4\pi \ell d}{3h}$.

6.12. $L = 1 + 2\ln\left(h^2/ab\right)$.

6.13. $L = \frac{4\pi N^2 S}{d+\ell/\mu}$.

6.14. $L = \frac{4\pi}{\ell}\left(N_1^2 S_1 + 2N_1 N_2 S_2 + N_2^2 S_2\right)$.

6.15. $M = \sqrt{L_1 L_2} \approx 0,6$ Гн.

6.16. 1) $L = 0$; 2) $L = 0,2$ Гн; 3) $L = 0,05$ Гн.

6.17. $M = 4\pi\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)$.

6.18. $M = 2b\ln(1 + a/h)$.

6.19. $M = 2\pi N a^2 / r_0$.

6.20. $M = \frac{2\pi^2 a^2 b^2 \cos\theta}{\left(b^2+h^2\right)^{3/2}}$.

6.21. $M = N_1 N_2 S^2 / \ell^3$.

6.22. $M_{12} = M_{21} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2 S}{15a+4\mu d}$.

6.2. Сохранение магнитного потока

6.23. $\Delta\phi = HS_2\frac{S_1-S_3}{S_1-S_2}$.

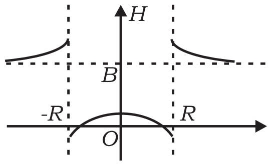
6.24. $\ddot{h} = -\frac{P}{m} + \frac{H_0^2 h_0^2 ab}{8\pi h^2 m}$. Колебания между h_0 и $h_0\frac{H_0^2 ab}{8\pi m g}$.

6.25. $J' = J - \frac{cH_0 S}{L}\cos\theta$.

6.26. $J = c\phi_0 / L$.

6.27. $J = \frac{c\pi R^2 B}{L}$, $A = \frac{\pi^2 R^4 B^2}{2L}$.

6.28. 1) Нуль. 2) $H = B\left(1 - \frac{2\pi^2 R}{L}\right)$.
3) См. рисунок.



6.29. $A = \frac{2\pi^2 N^2 J^2 a^2}{c^2 \ell}$.

6.30. $H = -\frac{\pi\rho\omega r^4}{cR^2}$ при $R > x > r$, $H = 0$ при $x > R$, $H = \frac{\pi\rho\omega}{cR^2}\left(2R^2 r^2 - 2x^2 R^2 - r^4\right)$ при $x < r$.

6.31. Внутри феррита $B = \frac{B_0\left(b^2/a^2-1\right)}{B_0/H_0+b^2/a^2-1}$.

Вне феррита $B = -\frac{B_0}{B_0/H_0+b^2/a^2-1}$.

6.32. а) $H_z(P_2) = H_0 - \frac{R^2}{4}(H_1 - H_0)\frac{z}{\left(z^2+r_2^2\right)^{3/2}}$,

$H_r(P_2) = -\frac{R^2}{4}(H_1 - H_0)\frac{r_2}{\left(z^2+r_2^2\right)^{3/2}}$;

б) $r_\infty = r_0\sqrt{H_0/H_1}$, при $H_0 r_0^2 \le H_1 R^2$,

$r_\infty = r_0\sqrt{1 + \frac{R^2}{r_0^2}\left(1 - \frac{H_1}{H_0}\right)}$, при $H_0 r_0^2 \ge H_1 R^2$.

6.33. $H = \frac{H_1^2}{H_0}$.

6.34. $v \le \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}}$.

6.3. Электромагнитная индукция

6.35. $J_1 \cong J\frac{a}{\ell}$.

6.36. $T = \frac{e\ell\Delta B(r_2 - r_1)}{c\tau} \simeq 15$ кэВ.

6.37. $a = g/\left(1 + CB^2\ell^2 g/c^2P\right)$.

6.38. $\mathcal{E} = (BS\omega/c)\sin(\omega t + \varphi_0)$, где φ_0 — угол между нормалью к контуру и направлением поля в начальный момент.

6.39. $\mathcal{E} = \omega H\ell^2/2c$.

6.40. $\mathcal{E} = (2\pi\omega m/cR)\sin(\omega t + \varphi_0)$, где $m = \frac{4\pi}{3}a^3M_0$ и φ_0 — угол между нормалью к контуру и направлением вектора $\vec{M}$ в начальный момент.

6.41. $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}\left(1 + \frac{CH^2\ell^2}{2mc^2}\right)}$.

6.42. $J(t) = \frac{\pi a^2\omega H_0}{c\sqrt{R^2 + \left(\omega L/c^2\right)^2}}\sin(\omega t - \varphi) = J_0\sin(\omega t - \varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/\left(c^2R\right)$. $N(t) = -\frac{1}{c}\pi a^2 H_0 J_0 \sin(\omega t - \varphi)$, $\bar{D} = \frac{1}{2}J_0^2R$, где L — индуктивность кольца, R — его сопротивление, в начальный момент плоскость кольца перпендикулярна $\vec{H}_0$.

6.43. $F_z = \frac{24J\dot{J}d}{R}\left(\frac{\pi a^2}{cd^2}\right)^4$; при $R \to 0$ $F_z = \frac{24J^2d}{c^2L}\left(\frac{\pi a^2}{d}\right)^4$.

6.44. $J = \frac{\omega NSH_0/c}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2/c^4}} \simeq 10$ А; $\langle\phi\rangle \simeq \frac{1}{2}NSH_0\left(\frac{R}{\omega L/c^2}\right)^2 \approx 50$ Мкс.

6.45. а) $A = \frac{\pi^4B_0^2a^2R^3}{16c^2\rho\tau} \simeq 3\cdot 10^5$ Дж; б) $A = \frac{\pi^2B_0^2R^4}{2L} \simeq 0,08$ Дж.

6.46. $v = q\left(a^2 + R^2\right)B^0/(2mcR)$.

6.48. $\mathcal{E} = -\mu SnN\dot{J}$.

6.49. $q(T) = \frac{C\dot{B}S}{c}\left(e^{-T/RC} - 1\right)$.

6.50. $F = -\frac{\omega\pi J_0\sin\theta}{c^2R^2}\left(b^2 - a^2\right)\cos\omega t$.

6.51. $E_z = \frac{2J\nu_0}{c^2a^3}\left(r^2 - a^2\right)$ при $0 \le r \le a$ и $E_z = 0$ при $a \le r \le b$.

6.52. $E_z = -\frac{j}{c^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)+\frac{2J}{c^2}\ln\frac{b}{a}$ при $0 \le r \le a$ и $E_z = \frac{2J}{c^2}\ln\frac{b}{r}$ при $a \le r \le b$.

6.53. $\mathcal{E} = \pi^2 N_1 N_2 D_1^2 J/\left(c^2\ell\tau\right)$.

6.54. $\omega_{\text{рот}} = \omega_{H_0}(1-k)$, где коэффициент скольжения поля H_0 равен $k = \frac{a}{W}+\sqrt{a^2W^2+4L^2R^2c^4}\cdot\frac{1}{2L^2}$. Здесь $a = \frac{1}{2}nc^2RH_0S$; L, R, S — параметры витка и W — нагрузка.

6.55а. $\omega_+ = \frac{\omega_-}{1+\mu c^2/\left(4\pi^2a^2\sigma^2\right)}$.

6.55б. Угол поворота диска $\varphi(t) = \frac{qa^2B_0}{4cJ}\left(1-e^{i\omega t}\right)$, где $J = ma^2/2$ — момент инерции диска.

6.56. $\bar{F}_z = \frac{\omega^2 L\phi_0^2\sin^3\theta(1+\cos\theta)}{8c^4b\left(R^2+\omega^2L^2/c^4\right)}$, где $\phi_0 = H_0\pi a^2$.

6.4. Цепи переменного тока. Трансформаторы. Длинные линии

6.57. $u_c = u_0\frac{\tau}{T}\frac{R}{R+r}$.

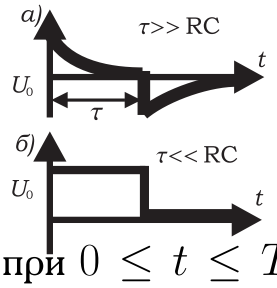
6.58. $q = C\frac{\mathcal{E}_1R_2+\mathcal{E}_2R_1}{R_1+R_2}$.

6.59. $U_c(t) = U_0\frac{R_c}{R+R_c}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, $\tau = \frac{RR_c}{R+R_c}C$, где C — ёмкость конденсатора, R — зарядное сопротивление, R_c — сопротивление утечки.

6.60. $U = U_0\frac{C_1+C_2e^{-t/\tau}}{C_1+C_2}$, $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1+C_2}$, а U_0 — начальное напряжение на ёмкости C_1.

6.61. $U(t) = \mathcal{E}\frac{\tau_1-\tau_2}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right)$, $\tau_i = R_iC_i$, $i = 1, 2$.

6.62. $U(t) = \begin{cases} U_0e^{-t/RC} \text{ при } 0 < t < \tau; \\ -U_0\left(1-e^{-\tau/RC}\right)e^{-(t-\tau)/RC} \\ \text{при } \tau \le t < \infty,\ U_0 = \frac{Q}{C} = \frac{J\ell}{vC} \end{cases}$



6.63. $U_R(t) = 0$ при $t < 0$, $U(t) = U_0e^{-t/RC}$ при $0 \le t \le T$, $U_R(t) = U_0\left(e^{\frac{-t}{RC}}-e^{-\frac{t-T}{RC}}\right)$ при $t > T$. Цепочка, дифференцирующая при $RC \ll T$.

6.64. $U_R(t) = 0$ при $t < 0$, $U_R(t) = U_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ при $0 \le t < T$,

$U_R(t) = U_0\left(-e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t-T}{\tau}}\right)$ при $t > T$, где $\tau = \frac{L}{Rc^2}$, цепочка, интегрирующая при $\tau \gg T$.

6.65. $mc \simeq \frac{2J_1^2}{\omega^2 R_4 C_4}\left(\frac{R_3}{R_3+R_2}\right)^2 \frac{dR_1}{dT}$, где J — полный ток в системе, измеряемой прибором A.

6.66. $\frac{L}{c^2\tau^2}$, $\frac{\tau}{C} \ll R$, где $C = C_0 + C_1$, $R = R_0 + R_1$, а τ — длительность импульса тока.

6.67. $J_1 = J\frac{L_{12}}{L_1}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$, где $\alpha = \frac{Rc^2/L_2}{1-L_{12}^2/L_1L_2}$ и $L_{12} = \frac{4\pi N_1 N_2 \mu S}{\ell}$.

6.68. $\omega_k = 2\omega_0 \sin\frac{k\pi}{2N}$, где $\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}$ и $k = 1, 2, ..., N$ — число длин волн (тока или напряжения), уложившихся на всей длине цепи.

6.69. Ток J и напряжение U удовлетворяют телеграфному уравнению: $\frac{LC}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + RC\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}$, где L, C — погонные индуктивность и ёмкость линии. Связь J с U : $C\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x}$ и $\frac{L}{c^2}\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x}$.

6.70. $\omega = vk$, где $v = c\Big/\sqrt{LC}$ и $k = \pi n/\ell$, $n = 1, 2, ...$

6.71. а) $J_x = J_0 \sin\frac{\omega_k x}{v}$, $U_x = U_0 \cos\frac{\omega_k x}{v}$, где $\omega_k = \frac{k\pi v}{\ell}$;

б) $U_x = U_0 \sin\frac{\omega_k x}{v}$, $J_x = J_0 \cos\frac{\omega_k x}{v}$, где $\omega_k = \frac{k\pi v}{\ell}$;

в) $J_x = J_0 \sin\frac{\omega_k x}{v}$, $U_x = U_0 \cos\frac{\omega_k x}{v}$, где $\omega_k = \frac{\pi(2k+1)v}{2\ell}$. Во всех случаях $U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}J_0$.

6.72. $\rho = \frac{1}{vC} = \frac{4\ln(d/r)}{v}$;
для двухпроводной линии $\rho\,[\text{Ом}] = 120\ln(d/r) \simeq 468$ Ом.

6.73. $\rho\,[\text{Ом}] = 60\ln\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}} \simeq 970$ Ом.

6.74. $Z_{\text{вх}} = \rho\left|\operatorname{ctg}\frac{2\pi\ell}{\lambda}\right|$, где $\lambda = \frac{2\ell}{n}$ — длина волны в линии, а ρ — ее волновое сопротивление ($n = 1, 2, ...$). 1) $Z_{\text{вх}} = 130$ Ом (индуктивное). 2) $Z_{\text{вх}} = \infty$ (параллельный резонанс). 3)$Z_{\text{вх}} = 347$ Ом (ёмкостное). 4) $Z_{\text{вх}} = 0$ (последовательный резонанс).

6.5. Скин-эффект[1]

6.76. а) $E_x(z) = E_0 e^{-z/\delta} e^{-i(\omega t - z/\delta)}$; б) $\bar{W} = \frac{1}{4}\sigma E_0^2 \delta$.

[1] Во всех ответах §6.5 $\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$ и $k = (1-i)/\delta$.

6.77. $\bar{W} = \frac{1}{4}\sigma\left(E_0^2\delta_0 + E_1^2\delta_1\right)$, где $\delta_i = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega_i}$, $\omega_0 = \omega$ и $\omega_1 = 0,1\omega_0$.

6.78. $R \simeq \frac{2\ell}{\sigma b\delta}$. Как распределен ток по сечению пластины?

6.79. При слабом скин-эффекте $R = R_0\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\right]$, где $R_0 = 1/\pi a^2\sigma$ — погонное сопротивление провода; при сильном скин-эффекте $R = R_0 a/2\delta = 1/2\pi a\delta\sigma$.

6.80. $R \simeq \frac{1}{a\delta\sigma}$.

6.81. $H(x) = H_0\left[\left(\mathrm{sh}^2\frac{x}{\delta} + \cos^2\frac{x}{\delta}\right)/\left(\mathrm{sh}^2\frac{h}{\delta} + \cos^2\frac{h}{\delta}\right)\right]^{1/2}$, где $H_0 = 4\pi J_0 n/c$. При слабом скин-эффекте $(\delta \gg h)$ $H(x) \simeq H_0$; при сильном скин-эффекте $(\delta \ll h)$ $H(x) \simeq H_0 e^{-(h-|x|)/\delta}$.

6.82. $j_\alpha = i\frac{\mu\omega\sigma r\sin\theta}{2c}H_{\text{внутр}}$, где $\vec{H}_{\text{внутр}} = \frac{3}{\mu+2}\vec{H}_0$ — мгновенное поле внутри шара; вихревые токи текут вдоль параллелей (ось сферической системы координат направлена вдоль $\vec{H}_0$). $\bar{Q} = \frac{3\pi}{5}\frac{a^5\sigma\omega^2H_0^2\mu^2}{c^2(\mu+2)^2}$.

6.83. $H_r = H_\alpha = 0$, $H_\theta = -\frac{3}{2}H_0\sin\theta e^{-\frac{(1-i)z}{\delta}}$, где z отсчитывается от поверхности шара по нормали в глубь проводника; ось сферической системы координат направлена вдоль $\vec{H}_0$. $\bar{Q} = \frac{3}{8}H_0^2a^2c\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}}$.

6.84. При слабом скин-эффекте количество тепла уменьшится в n^2 раз, а при сильном — возрастёт в n раз.

6.85. а) При сильном скин-эффекте $\bar{\mu} \simeq 1 - 2\pi n a^3$; б) при слабом скин-эффекте $\bar{\mu} \simeq 1 + 4\pi n\frac{\mu-1}{\mu+2}a^3$.

6.86. $F = \frac{4\pi^2\omega^2\sigma^2H_0^2a^{10}}{75c^4r^4}$.

6.87. $J_0 = \frac{2}{3}\frac{h^3c}{r_0^2}\sqrt{\frac{\rho g h}{\pi}} \simeq 10^6$ А.

6.88. $H = 2H_0/\left(ka\,\mathrm{sh}\,(kh) + 2\,\mathrm{ch}\,(kh)\right)$.

6.89. $H(x,t) = H_{\text{внутр}}\frac{\sin kx}{\sin kh}\exp(-\gamma t)$, где $k^2 = \frac{4\pi\sigma\gamma}{c^2}$, а γ определяется из уравнения $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + kh\right) = kh\frac{R}{h}$. Здесь $H_{\text{внутр}}$ — поле внутри трубы (см. задачу 5.12), когда снаружи оно H_0, h — толщина стенки трубы. Для тонкостенной трубы $(R \gg h)$ $(kh)_{min} \simeq \pi$, т. е. $\gamma_{\min} \simeq \frac{\pi c^2}{4\sigma h^2}$.

6.90. $H = 2H_0/[kR\mu\,\mathrm{sh}\,(kh) + 2\,\mathrm{ch}\,(kh)]$.

6.91. $H\,(x) = H_0\left[\left(\mathrm{ch}\,\frac{2x}{\delta} + \cos\frac{2x}{\delta}\right)\Big/\left(\mathrm{ch}\,\frac{2d}{\delta} + \cos\frac{2d}{\delta}\right)\right]^{1/2}$.

6.92. а) Снаружи $\vec{H} = \vec{H}_0 - \frac{2\vec{m}}{r^2} + \frac{4(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^4}$, где $\vec{m} \simeq \frac{k^2a^2}{16}a^2\vec{H}_0$; внутри $H_r = H_0\cos\alpha\left(1 - k^2r^2/8\right)\Big/\left(1 - k^2a^2/4\right)$,

$H_\alpha = -H_0\sin\alpha\left(1 - 3k^2r^2/8\right)\Big/\left(1 - k^2a^2/4\right)$, $H_z = 0$.

б) Снаружи, как в "а", но $\vec{m} \simeq -\frac{a^2H_0}{2}$; внутри $\vec{H} \simeq 0$, так как в глубь цилиндра поле спадает $\sim e^{-(a-r)/\delta}$.

6.93. $\vec{H} \simeq \frac{2\vec{H}_0\delta}{a}e^{-h/\delta} << \vec{H}_0$, где h — толщина стенки цилиндра.

6.94. $Q_\perp/Q_\parallel = 2$.

6.95. $H \simeq H_0\Big/\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}$.

6.96. $j\,(x) = \frac{J}{\pi}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}}\right)$.

6.97. $H \simeq H_0\Big/\sqrt{1 + \frac{4a^2h^2}{9\delta^4}}$.

6.98. $M_z = H_0^2a^4\Delta/\left(3\delta^2\right)$.

6.99. $L = \frac{4\pi\delta_2}{a}\frac{\delta_1+\delta_3}{\delta_1+\delta_2+\delta_3} \simeq 0,16$; в случае слабого скин-эффекта $L = \frac{4\pi\delta_2}{a} \simeq 0,25$.

6.100. $H_z \simeq H_0\Big/\left(\mathrm{ch}\,kd + \frac{ka}{\mu}\,\mathrm{sh}\,kd\right)$.

6.101. $\tau \ll 4\pi bd\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)\big/\rho ac^2$, где b — большой радиус тора и $d \ll a$.

6.6. Поток энергии. Ток смещения

6.103. Поток энергии через кабель $\frac{dW}{dt} = 2CJU\ln\frac{r_2}{r_1}$, где C — его погонная ёмкость, а J и U — амплитуды тока и напряжения в кабеле.

6.105. $S_y = S_z = 0$, $S_x = \frac{JU}{4\pi\ln(d/r_0)}\frac{d^2}{x^2(x-d)}$, где r_0 — радиус провода.

6.107. 1) $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$; 2) $j_{\text{см}} = -\frac{u}{4\pi}\frac{U}{d^2}$; 3) ток смещения сменит знак.

7.1. Движение частиц в электрическом и магнитном полях. Дрейф. Магнитная ловушка

7.1. $x = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \operatorname{ch} \frac{qEy}{P_0 c}$.

7.2. $x = x_0 + r\left[\sin(\omega t - \alpha) + \sin\alpha\right], y = y_0 + r\left[\cos(\omega t - \alpha) - \cos\alpha\right]$, $z = z_0 + v_{0z}t$, $v_\perp \cos\alpha = v_{0x}$, $v_\perp \sin\alpha = v_{0y}$, $\omega = \frac{qH}{\gamma mc}$, $r = \frac{v_\perp}{\omega}$.

7.3. $\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} \pm \omega_L \approx \omega_0 \pm \omega_L$, $\omega_3 = \omega_0$, где $\omega_L = \frac{qH}{2mc}$.

7.4. $H > \sqrt{\frac{2mc^2U}{ed^2}} \simeq 100$ Э.

7.5. Для $\vec{r}\,(t=0) = 0$, $\vec{v}\,(t=0) = (v_0, 0, 0)$ и $E_y/H \ll c$

$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{cE_y}{H}t$, $y = \frac{v_0}{\omega}(\cos\omega t - 1)$, где $\omega = \frac{eH}{mc}$,

$v_{\text{др}} = \bar{v}_x = c\frac{E_y}{H}$.

7.6. $v = c\frac{E}{H}$.

7.7. $\vec{v}_{\text{др}} = c\frac{\left[\vec{F}\times\vec{H}\right]}{eH^2}$.

7.9. $\sin\theta > \sqrt{H/H_m}$.

7.10. $R = \sqrt{1 - H/H_m}$.

7.2. Фокусировка продольным и поперечным полями. Квадрупольные электростатические и магнитные линзы

7.13. $F = \frac{2\pi\gamma mvc}{qH}$.

7.14. $F = \frac{2\gamma mvc}{qH}$.

7.22. $F = \frac{\mathcal{E}cR^2}{2eJ\ell} = 10\text{ м} \gg \ell$.

Библиографический список

Власов А. А. Макроскопическая электродинамика. М.: Гостехиздат, 1955.

Горелик Г. С. Колебания и волны. М.: Физматгиз, 1959.

Гудмен Дж. Взведение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.

Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.

Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Иностр. лит., 1958; Оптика. М.: Иностр. лит.,1953.

Калитиевский Н. И. Волновая оптика. М.: Наука, 1971.

Компанеец А. С. Теоретическая физика. М.: Гостехиздат, 1957.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973; Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.

Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. М.: Высш. шк., 1983; Оптика. М.: Высш. шк., 1985.

Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. М.: Наука, 1987.

Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963.

Берклеевский курс физики. М.: Наука, 1971—1974. Т. 2: Парсел Э. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1971; Т. 3: Крауфорд Ф. Волны. М.: Наука, 1974.

Сивухин Д. В. Общий курс физики. М.: Наука, 1977. Т. 3: Электричество.

Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Иностр. лит., 1954.

Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971.

Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948.

Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1966.

Фейнман Р. и др. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. М.: Мир, 1966. Вып. 5, 6.

Франсон М. Голография. М.: Мир, 1972.

Харкевич А. А. Спектры и анализ. М.:Гостехиздат, 1937.

Батыгин В. В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970.

Векштейн Е.Г. Сборник задач по электродинамике. М.: Высш. шк., 1966.

Сборник задач по теоретической физике / Л.Г.Гречко, В.И.Сугаков, О.Ф.Томасевич, А.М.Федорченко. М.: Высш. шк. 1972.

Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. М.: Атомиздат, 1971.

Меледин Г.В. Физика в задачах. Экзаменационные задачи с решениями. М.: Наука, 1985.

Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1977. Ч. 3. Стрелков С.П. и др. Электричество и магнетизм. Ч.4. Гинзбург В.Л. и др. Оптика.

Руссо М., Матье Ж. П. Задачи по оптике. М.: Мир, 1976.

Генрий Викторович Меледин,

Валерий Семенович Черкасский

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ЗАДАЧАХ

Часть I

Электродинамика частиц и полей

Учебное пособие

Подписано в печать Формат $60 \times 84/16$

Офсетная печать. Уч.-изд. л. 5.5

Заказ № Тираж 300 экз. Цена

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета; участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.